



Syria Math

البنى الجبرية 1



الككتور: حمزة الحاكمي

المحاضرة: السادسة

التاريخ: ٢٠١٦/١٠/١١

إعداد: أحمد أبو التوت

Web: www.syriamath.net

group: Improve our mathematics



في هذه المحاضرة ما زلنا ببحث المجموعات حيث أعطى مبرهنة تخص قدرة المجموعات القابلة للعد ثم انتقل لبعض التعارف وأعطى بعدها مبرهنة خوارزمية القسمة في حالة خاصة وحالة عامة.

مبرهنة :

كل مجموعة جزئية وغير منتهية في N^* تكون قابلة للعد .

البرهان :

نريد إثبات أن

$$\text{card } A = \text{card } N^*$$

لتكن D مجموعة جزئية وغير منتهية في N^* .

ولنفرض أن a_1 هو عنصر أصغر في D .

لنأخذ المجموعة $D \setminus \{a_1\}$ ولنفرض أن a_2 هو العنصر الأصغر فيها

لنأخذ المجموعة $D \setminus \{a_1, a_2\}$ ولنفرض أن a_3 هو العنصر الأصغر فيها

لنأخذ المجموعة $K = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ والتي فيها a_n هو العنصر الأصغر للمجموعة

$$D \setminus \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}\} : \forall n \in N^*$$

لنعرف العلاقة

$$f : N^* \rightarrow K$$

$$: \forall n \in N^* ; f(n) = a_n$$

إن f تطبيق لأنه إذا كان $n, m \in N^*$ بحيث $n = m$ عندئذ :

$$f(n) = a_n$$

$$f(m) = a_m$$

$$\Rightarrow f(n) = f(m)$$

((العنصر الأصغر وحيد))

إن f متباين لأنه إذا كان $n, m \in N^*$ بحيث $f(n) = f(m)$ عندئذ

لنفرض جديلاً أن $n \neq m$ وان $n > m$ عندئذ تكون

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{m-1}\} \subset \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}\}$$



ومنه تكون $D \setminus \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}\} \subset D \setminus \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{m-1}\}$

وبالتالي $a_n, a_m \in D \setminus \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{m-1}\}$

وأن $a_n > a_m$ وهذا تناقض كون $f(n) = f(m)$ وبالتالي $n = m$ أي أن f متباين .

نستنتج ان $f : N^* \rightarrow D$ انه تطبيق متباين ((كبرنا المستقر فقط))

وايضا لما كانت $D \subset N^*$ فإن العلاقة $g : D \rightarrow N^*$

$$\forall d \in D; g(d) = d$$

فالعلاقة هي تطبيق متباين

وحسب ميرهنة ((كانتور - برنشتاين)) نجد أن

$$\text{card } A = \text{card } N^*$$

وهو المطلوب

ملاحظة : كل مجموعة جزئية وغير منتهية من مجموعة قابلة للعد تكون أيضاً قابلة للعد

لتبدأ ببعض تعاريف وخواص الاعداد الصحيحة

تعريف (١) : ليكن $a, b \in Z$ بحيث $b \neq 0$ نقول أن b يقسم a إذا وجد $c \in Z$ بحيث $a = c.b$.

تعريف (٢) : ليكن $p \in Z$ نقول عن العدد p أولياً إذا كان $p > 1$ وكانت مجموع قواسمه $\{\pm 1, \pm p\}$.

تعريف (٣) : ليكن $a, b \in Z$ نقول عن a هو مضاعف للعدد b إذا وجد c بحيث $a = c.b$.

مبرهنة : **Syria Math**

ليكن $a, b \in Z$ بحيث $b > 0$ عندئذ يوجد $q, r \in Z$ بحيث $a = q.b + r$ حيث $0 \leq r < b$

فضلاً عن ذلك q, r يتعينان بشكل وحيد .

البرهان :

لنأخذ المجموعة : $S = \{a - k.b : k \in Z, a - k.b \geq 0\}$

لنرى إذا كانت S خالية أم غير خالية وهنا نميز حالتين :

(١) $0 \in S$ وهنا واضح أن $S \neq \emptyset$

وبالتالي يوجد $k \in Z$ بحيث $0 = a - k.b$ أي أن $a = k.b$

وهنا $r = 0$ و $k = q$ ويتم المطلوب .



بقي ان نثبت ان q, r يتعيانان بشكل وحيد .

ان الصفر يتعين بشكل وحيد (لا يوجد صفران غير متساويان)

$$a = q.b \wedge a = q_1.b \iff q, q_1 \text{ يوجد انه } r = 0$$

$$\text{ومنه } q = q_1 \iff q.b = q_1.b \text{ لان } b > 0$$

(٢) $0 \notin S$ يجب إثبات أن S غير خالية .

إذا لنبرهن أن $S \neq \emptyset$ سنميز ثلاث حالات :

(١) $a > 0$ عندئذ نختار $k = 0$ فيكون : $a - b.k = a > 0$ ومنه $a - b.k > 0$ ومنه $a - b.k \in S$ ومنه S ليست خالية .

(٢) $a < 0$ عندئذ نختار $k = 2a$ نجد أن :

$$a - (2a).b > 0$$

وبالتالي المجموعة $a + 2a.b \in S \implies S \neq \emptyset$

(٣) $a = 0$ نختار $k = -1$ فنجد : $a - (-1)b > 0$ وبالتالي $-(-1)b \in S$ وهكذا نجد أن S غير خالية .

مما سبق نجد أن $S \neq \emptyset$ وكما أن $S \subset N$ ومنه S تحوي عنصر أصغر وليكن r حيث أن $r \in S$ حيث :

$$r = a - q.b \quad : \quad q \in \mathbb{Z}$$

$$\text{أي أن : } a = q.b + r$$

الآن لنبرهن أن $r < b$:

$$\begin{cases} r > b \\ r = b \\ r < b \end{cases} \text{ لدينا العلاقة من أجل عددين إما}$$

Syria Math

الحالة الاولى : نفرض أن $r > b$ عندئذ : $r - b > 0$ ولناخذ :

$$a - (1 + q)b = \underbrace{a - qb}_r - b = \overset{\text{موجب}}{r} - \overset{\text{موجب}}{b} > 0$$

$$\text{ومنه } a - (1 + q)b \in S$$

$$a - (1 + q)b < a - q.b = r \implies a - (1 + q)b < r$$

وهذا يناقض كون r عنصر أصغر في S .

الحالة الثانية : نفرض أن $r = b$ عندئذ :



$$a - (1 + q).b = \underbrace{a - qb}_r - b$$

$$r - b = 0 \text{ وبالتالي}$$

ومنه $a - (1 + q)b \in S$ وقيمه تساوي الصفر وهذا يناقض كون $0 \in S$ فتكون الحالة الثانية مرفوضة ويكون لدينا $r < b$

وبذلك يكون :

في الحالة الأولى $0 \in S$ كان $r = 0$

في الحالة الثانية $r > 0$ وبحالة $0 \notin S$ كان $0 < r < b$

وبكلتا الحالتين $0 \leq r < b$

بقي ان نبرهن الوجدانية بالنسبة للحالة الثانية

$$\text{لنفرض أن : } a = q_1.b + r_1 \text{ و } a = q.b + r$$

حيث : $q, q_1, r, r_1 \in \mathbb{Z}$ وأن $0 \leq r, r_1 < b$.

لنفرض جدلاً أن $r \neq r_1$ عندئذ $q.b + r = q_1.b + r_1$

لنفرض أن $r_1 < r$ حيث $r - r_1 > 0$

$$\Rightarrow (q_1 - q)b = r - r_1 \geq b$$

وهذا غير ممكن . ومنه $r = r_1$

$$\text{وبالتالي } r = r_1 \Leftarrow (q_1 - q)b = 0 \text{ ولدينا } b \neq 0 \text{ ومنه } (q_1 - q) = 0 \Leftarrow q_1 = q$$

ويتم المطلوب.

مبرهنة :

المبرهنة السابقة تبقى صحيحة إذا كان $b \neq 0$ وفي هذه الحالة يكون $a = q.b + r$ حيث $0 \leq r < |b|$

بحيث $q, r \in \mathbb{Z}$. فضلاً عن ذلك q, r يتعيان بشكل وحيد .

البرهان :

نميز حالتين :

$b > 0$ حسب النص السابق نحصل على المطلوب .



$b < 0$ عندئذ $|b| > 0$ ومنه يوجد حسب الاعتماد على النص السابق $q_0, r \in \mathbb{Z}$ بحيث :

$$0 \leq r < |b| \quad \text{وأن} \quad a = q_0 \cdot |b| + r$$

$$\text{ومنه :} \quad a = -q_0 \cdot b + r \iff b < 0$$

بفرض أن $\overset{\text{وحد}}{\overline{q}} = \overline{-q_0}$ نجد أن $a = q \cdot b + r$ وأن $0 \leq r < |b|$ ومنه q, r وحيدين .

"انتهت المحاضرة"

جورج كانتور: يعتبر أول من أشار إلى أهمية مبدأ التناظر واحد لواحد بين المجموعات، ومن عرف المجموعات اللانهائية والمتسقة، كما أنه أثبت أن الأرقام الحقيقية أكثر بكثير من الأرقام الطبيعية. وبالفعل فإن نظرية كانتور تستلزم وجود عدد غير متناه من اللانهائية. وكذلك فإن كانتور هو من عرف الأرقام الكمية والترتيبية وطرق الحساب الخاصة بهم. ويعرف عن أعماله أنها ذات قيمة فلسفية عالية.

Syria Math