المعادلات التفاضلية 1

الدكتور: خليل يحيى

المحاضرة : الأولى

التاريخ : ٥/١٠/٢٠١٦

مفردات المقرر:

الفصل الأول: ويشتمل على:

مفاهيم عامة - مرتبة المعادلة التفاضلية - درجة المعادلات التفاضلية - تشكيل المعادلة التفاضلية.

الفصل الثاني : ويشتمل على:

المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى - المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى المحلولة بالنسبة للمشتق – المعادلات ذات المتحولات القابلة للفصل – المعادلات المتجانسة، والمعادلات غير المتجانسة (التي ترد إلى متجانسة)

الفصل الثالث : ويشتمل على:

المعادلات التفاضلية التامة وغير التامة.

الفصل الرابع : ويشتمل على:

المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى غير المحلولة بالنسبة للمشتق.

الفصل الخامس : ويشتمل على:

المعادلات التفاضلية من مراتب عليا.

ولنبدأ الآن في دراسة الفصل الأول:

تعريفات ومنشأ المعادلة التفاضلية

تعريف المعادلة التفاضلية:

هي كل علاقة تحوي متغيّرات مستقلّة والدوال المبحوث عنها ومشتقات هذه الدوال بالنسبة للمتغيرات وبالتالي يجب أن يكون عدد المتحوّلات واحداً على الأقل وعدد الدوال المدروسة واحدة على الأقل .

إذا حوت متغير واحد ندعوها معادلة تفاضلية عادية .

وإذا حوت أكثر من متغير ندعوها تفاضلية جزئية ،

وبالتالي تكون المعادلة التفاضلية العادية هي علاقة بين المتغير المستقل x والدالة المجهولة لهذا المتغير ومشتقات هذه الدالة

$$F\left(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

y تابع لـ x (دالة مجهولة) و x متحول مستقل

عندما نضع مرتبة الاشتقاق يجب وضعها بين قوسين أي :

$$y' , y'' , y^{(3)}, y^{(4)}, y^{(5)}, \dots, y^{(n)}$$

أما **المعادلة التفاضلية الجزئية** :

هي علاقة بين المتغيرات المستقلة والدالة لهذه المتغيرات ومشتقاتها :

$$Z = Z(x,y)$$
$$F\left(x, Z', Z'_x, Z'_y, Z''_{xy}, Z''_{yx}, \dots\right) = 0$$
$$y' = \frac{dy}{dx} \quad \text{مشتق تام}$$
$$y' = \frac{\partial y}{\partial x} \quad \text{مشتق جزئي}$$

مرتبة المعادلة التفاضلية العادية:

مرتبة المعادلة التفاضلية العادية تحددها أكبر مرتبة مشتق تحويها المعادلة التفاضلية .

درجة المعادلة التفاضلية:

يحددها أكبر قوة لأكبر المشتقات .

مثال: المعادلة:

$$(y'')^3 + 6xy = x^2 + 1$$

من المرتبة الثانية والدرجة الثالثة، حيث: المرتبة يساوي عدد الفتحات ، والدرجة يساوي قوة أكبر عدد فتحات .

تعريف:

نقول عن الدالة $y = g(x)$ أنه حل للمعادلة التفاضلية :

$$F\left(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

إذا أخذنا:

$$y' = g'(x)\ ,\ \ y'' = g''(x)\ ,\ \ y''' = g'''(x), \dots,\ \ y^{(n)} = g^{(n)}(x)$$

وعوضنا في المعادلة التفاضلية وتحولت إلى مطابقة أي الطرف الأيمن يساوي الطرف الأيسر .

مثال:

أثبت أن الدالة $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$ هي حل للمعادلة التفاضلية:

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

الحل:

لنوجد المشتقات:

$$y' = -2c_1e^{-2x} - 3c_2e^{-3x}$$

$$y'' = 4c_1e^{-2x} + 9c_2e^{-3x}$$

نعوض في المعادلة التفاضلية نجد:

$$4c_1e^{-2x} + 9c_2e^{-3x} + 5(-2c_1e^{-2x} - 3c_2e^{-3x}) + 6(c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x})$$
$$= 4c_1e^{-2x} + 9c_2e^{-3x} - 10c_1e^{-2x} - 15c_2e^{-3x} + 6c_1e^{-2x} + 6c_2e^{-3x}$$
$$= -6c_1e^{-2x} + 6c_1e^{-2x} - 6c_2e^{-3x} + 6c_2e^{-3x} = 0$$

حققت المعادلة ، حصنا على مطابقة ، إذن هو حل للمعادلة التفاضلية .

الحل العام:

الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

إما ديكارتيا أو وسيطياً أو هندسيّاً ، وهو كل حل من الشكل:

$$y = y(x)$$

أو من الشكل:

$$F(x, y) = 0$$

أو:

$$x = x(\underbrace{t}_{\text{وسيط}}, \underbrace{c_1, \dots, c_n}_{\text{ثوابت}})$$

$$y = y(t, c_1, \dots, c_n)$$

وهندسيّاً يمثل أسرة منحنيات للحل العام تعطى بشكل ديكارتي أو هندسي أو وسيطي .

الحل الشاذ:

هو كل حل لا تتحقق به وحدانية الحل ، وهندسياً هو ذلك الحل الّذي يوافق منحنياً تكامليّاً يحقق المعادلة التفاضليّة وغير موجود في أسرة الحل العام .

الحل الخاص:

ينتج من تعويض قيمة الثابت c وكل قيمة تعطي حل خاص جديد تبعاً لقيم c .

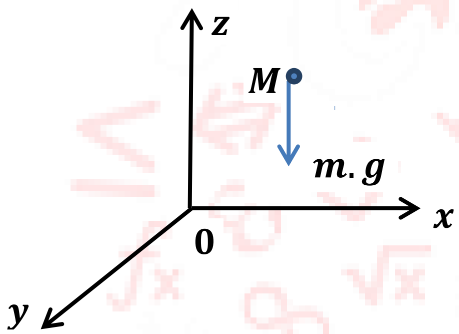
منشأ المعادلات التفاضلية:

١) هندسياً:

كثير من الخواص التي يحققها منحني ما أو عدة منحنيات يمكن التعبير عنها بمعادلة تفاضلية اعتماداً على خواص المماسات والنواظم والتقوّس ...إلخ.

٢) ميكانيكيّاً:

فروع الميكانيك من حركة وتحريك وتوازن مليئة بالمعادلات التفاضلية فإذا فرضنا أن نقطة مادية في المستوي $oxyz$ مركباتها على المحاور هي:



$$mx'' = 0$$
$$my'' = 0$$
$$mz'' = -mg$$

ولإيجادها نقوم بالمكاملة بالنسبة للوسيط t :

$$m.x' = c_1$$
$$m.y' = c_2$$
$$m.z' = m.g.t + c_3$$

وبالمكاملة مرة ثانية نحصل على **معادلات الحركة**:

$$m.x = c_1.t + c_4 \ldots (1)$$
$$m.y = c_2.t + c_5 \ldots (2)$$
$$m.z = \frac{1}{2}m.g.t^2 + c_3.t + c_6 \ldots (3)$$

حيث: $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ هي ثوابت التكامل.

٣) حذف الثوابت:

كذلك فإن حذف الثوابت الاختيارة يتم بإيجاد علاقة لهذه الثوابت وبالتالي إذا حذفنا n ثابت اختياري يؤدي بنا إلى معادلة تفاضلية من المرتبة n .

$$y = c_1.e^x + c_2.e^{-x} + c_3$$

نشتق:

$$y' = c_1.e^x - c_2.e^{-x}$$
$$y'' = c_1.e^x + c_2.e^{-x}$$
$$y''' = c_1.e^x - c_2.e^{-x}$$

نلاحظ أنه لدينا: $y' = y'''$

وبمكاملة الطرفين يكون:

$$\boxed{y = y'' + c}$$

إذن بحذف الثوابت حصلنا على المعادلة التفاضلية التي تكون العلاقة الأولى حلاً لها .

انتهت المحاضرة..

مع تحيات فريق سيريا ماث ^_^

لا تنسونا من صالح دعواتكم