الاستقلال العشوائي:

ليكن (Ω, F, P) فضاءً احتمالياً

1- إذا كانت $A, B \in F$ نقول عنهما أنهما مستقلان عشوائياً إذا تحقق:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

2- إذا كانت $A_1, A_2, A_3 \in F$ فإننا نقول عن هذه الأحداث أنها مستقلة عشوائياً إذا تحقق

* الأحداث A_1 و A_2 و A_3 مستقلة مثنى مثنى

** $$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$$

3- إذا كانت (A_i) متتالية أحداث من F، نقول عن هذه المتتالية أنها مستقلة عشوائياً إذا تحقق:

أ- كل متتالية جزئية من المرتبة n حيث $n \geq 1$ مستقلة عشوائياً.

ب-

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

نتائج:

① من تعريف الاستقلال نجد أن

$$P_A(B) = P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)}$$

$$P_A(B) = P(A)$$

② إذا كان $A \cap B = \emptyset$ فلكي يكونا مستقلين يجب أن يكون

$P(A) = 0$ أو $P(A) = 0$

أي أحدهما على الأقل يجب أن يكون حدثاً مستحيلاً.

③ في حالة تنافي الأحداث، لدينا احتمال الاجتماع يساوي مجموع الاحتمالات.

Scanned by CamScanner

- وفي حالة الاستقلال، لدينا امتداد التقاطع ليشمل جداء الاحتمالات.

مثال: في دراسة لمرض الربة أُجري فحص لمجموعة مؤلفة من 10.000 شخص أعمارهم تزيد عن 60 سنة، ومن بينهم يوجد 3300 شخص لديهم أمراض رئوية.
ولقد وُجد من المجموعة 4000 شخص مدخن، ومن بين المدخنين 1800 شخص لديه مرض رئوي، المطلوب:
- هل التدخين والأمراض الرئوية حادثتان مستقلتان؟

الحل: بفرض A الحدث الدال على أن الشخص لديه مرض رئوي
B " " " " " مدخن

فيكون لدينا:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3300}{10000} = 0,33$$

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{4000}{10000} = 0,4$$

$$P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{1800}{10000} = 0,18$$

نلاحظ أن

$$P(A \cap B) = 0,18 \neq P(A) \cdot P(B) = 0,132$$

وبالتالي الحادثتان غير مستقلتين.

Scanned by CamScanner

خواص الاستقلال:

1- الأحداث المستقلة عن نفسها هي فقط الأحداث شبه المستحيلة والأحداث شبه الأكيدة.

البرهان:

بفرض A حدث مستقل عن نفسه وبالتالي:

$$P(A \cap A) = P(A).P(A)$$

$$\Rightarrow P(A) = P(A)^2$$

$$\Rightarrow P(A)(1 - P(A)) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(A) = 0 \\ P(A) = 1 \end{cases}$$

2- إذا كان A و ϕ حدثان مستقلان عن أي حدث آخر A فإن:

$$0 < P(A) < 1$$

البرهان:

$$P(A \cap \phi) = 0 = 0 \cdot P(A) = P(\phi).P(A)$$

$$P(A \cap \Omega) = P(A) = P(A).1 = P(A).P(\Omega)$$

Scanned by CamScanner

3- إذا كانت الحدث A, B مستقلة عن بعضها فإن:

A', B مستقلة.

و A, B' مستقلة

و A', B' مستقلة.

البرهان:

$$P(A' \cap B) = P(B \setminus A)$$
$$= P(B \setminus (A \cap B))$$
$$= P(B) - P(A \cap B)$$
$$= P(B) - P(A) \cdot P(B)$$
$$= P(B)\,(1 - P(A))$$
$$= P(B) \cdot P(A')$$

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)'$$
$$= 1 - P(A \cup B)$$
$$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$$
$$= P(A') - P(B) + P(A) \cdot P(B)$$
$$= P(A') - P(B)[1 - P(A)]$$
$$= P(A') - P(B) \cdot P(A')$$
$$= P(A')[1 - P(B)]$$
$$= P(A') \cdot P(B')$$

Scanned by CamScanner

4- إذا كانت $(A_i)_{1 \le i \le n}$ متتالية أحداث من F مستقلة عشوائياً فإن $(A'_i)_{1 \le i \le n}$ تكون مستقلة عشوائياً.

5- إذا كانت $(A_i)_{i \ge 1}$ متتالية متنافية مثنى مثنى وكانت A_i و B مستقلة عشوائياً من أجل كل i عندئذٍ فإن B و $\bigcup_{i \ge 1} A_i$ مستقلة عشوائياً.

$$P\left(B \cap \left(\bigcup_{i \ge 1} A_i\right)\right) = P\left(\bigcup_{i \ge 1} (B \cap A_i)\right)$$

$$= \sum_{i \ge 1} P(B \cap A_i)$$

$$= \sum_{i \ge 1} P(B) \cdot P(A_i)$$

$$= P(B) \cdot \sum_{i \ge 1} P(A_i)$$

$$= P(B) \; P\left(\bigcup_{i \ge 1} A_i\right)$$

6- إذا كانت $A, B \in F$ وكان أحد الشرطين:

$P_A(B) = P_{A'}(B)$ عندئذٍ يكون A, B مستقلين عشوائياً

البرهان: بما أن A و $\acute{A}$ تشكل جزئة لـ Ω حسب نظرية الاحتمال المركب يكون:

$$P(B) = P(A) \cdot P_A(B) + P(\acute{A}) \cdot P_{A'}(B)$$

$$= P(A) \cdot P_A(B) + P(A') \cdot P_A(B) \quad \text{(رضا)}$$

Scanned by CamScanner

$$= [P(A) + P(A')] \cdot P_A(B)$$

$$= P_A(B)$$

7- إذا كانت $A, B, C \in F$ وكان $A \subseteq B$ و

A, C مستقلان عشوائياً.

B, C مستقلان عشوائياً

عندئذٍ C و $B \setminus A$ مستقلان عشوائياً

البرهان:

$$P[(B \setminus A) \cap C]$$

$$= P[(B \cap C) \setminus (A \cap C)]$$

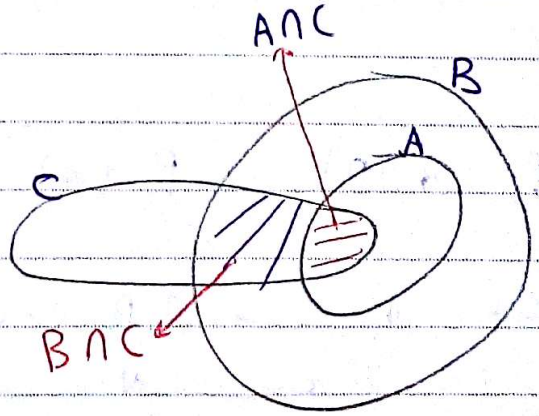
$A \subseteq B$

$$= P(B \cap C) - P(A \cap C)$$

$$= P(B) \cdot P(C) - P(A) \cdot P(C)$$

$$= [P(B) - P(A)] \cdot P(C)$$

$$= P(B \setminus A) \cdot P(C)$$



Scanned by CamScanner

8- إذا كان لدينا صفان من الأحداث F_1 و F_2 نقول عن هذين الصفين بأنهما مستقلان عشوائياً إذا كان كل حدث من F_1 مستقل عن كل حدث من F_2

مثلاً: إذا كان $A, B \in F$ مستقلاً عشوائياً فإن الصفين التاليين مستقلان عشوائياً

$$F_1 = \{\phi, \Omega, A, A'\}$$

$$F_2 = \{\phi, \Omega, B, B'\}$$

9- إذا كانت $(A_i)_{1 \le i \le n}$ متتالية مستقلة عن بعضها البعض عندئذٍ:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i'\right)$$

$$= \boxed{1 - \prod_{i=1}^{n} P(A_i')}$$

تعريف الاستقلال الشرطي:

نقول عن حدثين أنهما مستقلان شرطياً بالنسبة للحدث $C \in F$

$A, B \in F$

إذا تحقق:

$$\boxed{P_C(A \cap B) = P_C(A) \cdot P_C(B)}$$

ملاحظة: يمكن أن يكون الحدثان A, B مستقلين عشوائياً وغير مستقلين شرطياً بالنسبة للحدث C

Scanned by CamScanner

مثال: إذا كان احتمال أن يعيش رجل ١٥ سنوات أخرى هو $\frac{1}{4}$ واحتمال أن تعيش زوجته ١٥ سنوات أخرى هو $\frac{1}{3}$ والمطلوب:

١. احسب احتمال أن يعيش الاثنان ١٥ سنوات أخرى.

الحل: نفرض A الحدث الدال على أن الرجل يعيش ١٥ سنوات أخرى.

B = = = = الزوجة تعيش = = =

سيكون الحدث المطلوب: $A \cap B$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

حسب الاستقلال.

$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{12}$

٢. احسب احتمال أن يعيش أحدهما على الأقل ١٥ سنوات أخرى.

الحل:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$

٣. احسب احتمال أن يتوفى الاثنان خلال الـ١٥ سنوات الأخرى.

$P(\acute{A} \cap \acute{B}) = P(A') \cdot P(B')$

حسب الاستقلال.

$= \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

٤. احسب احتمال أن تعيش الزوجة فقط ١٥ سنوات أخرى

طريقة ①

$P(\acute{A} \cap B) = P(A') \cdot P(B)$

$= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

Scanned by CamScanner

طريقة ②

$$P(B|A) = P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

مثال: إذا كان احتمال أن يصيب A الهدف هو $\frac{1}{4} = 0,25$
واحتمال أن يصيب B الهدف هو 0,40
فإذا صوب كل من A و B نحو الهدف مرة واحدة عين احتمال:

① إصابة الهدف.
② عدم إصابة الهدف
③ إصابة الهدف من واحد فقط.

الحل:

①
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$
$$= 0,25 + 0,40 - (0,25)(0,40) = 0,55$$

②
$$P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B')$$
$$= (0,75)(0,60) = 0,45$$

③
$$= P(A \cap B') \cup P(A' \cap B)$$
$$= P(A \cap B') + P(A' \cap B)$$
$$= P(A) \cdot P(B') + P(A') \cdot P(B)$$
$$= (0,25)(0,60) + (0,75)(0,40)$$
$$= 0,45$$

Scanned by CamScanner

مثال: يمكن لمؤشر داوجونز أن يزداد أو ينخفض يومياً فإذا كان احتمال الزيادة (0,50) في اليوم، فخلال أربعة أيام عين احتمال أن يزداد مرة على الأقل، علماً أن الزيادة والنقصان حوادث مستقلة

الحل: نفرض E_i الزيادة في اليوم حيث $i = 1,2,3,4$

فيكون:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4) = P\left(\bigcup_{i=1}^{4} E_i\right) = 1 - \left(\bigcap_{i=1}^{4} E_i'\right)$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{4} P(E_i')$$

$$= 1 - (0,50)^4 = 0,938$$

التمثلة المحلولة في الكتاب هامة للامتحان

انتهت المحاضرة السادسة

Scanned by CamScanner