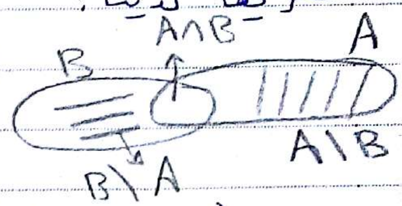
خاصية الفرق التناظري:

$$P(A \triangle B) = P(A) + P(B) - 2P(A\cap B)$$

البرهان:

تعريفاً لدينا:

$$A \triangle B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$$
$$= \underbrace{A\setminus(A\cap B)\cup(B\setminus(A\cap B))}_{\cap=\phi}$$



$$\Longrightarrow P(A\triangle B) = P(A\setminus(A\cap B)) + P(B\setminus(A\cap B))$$
$$= [P(A) - P(A\cap B)] + [P(B) - P(A\cap B)]$$
$$= \boxed{P(A) + P(B) - 2P(A\cap B)}$$

متباينات (متراجحات) احتمالية:

وجدنا سابقاً أن:

$$P(A_1\cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1\cap A_2)$$

$$\Longrightarrow P(A_1\cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$$

يمكن تعميم هذه المتراجحة بشكل عام:

$$P\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) \leq \sum_{i\geq 1} P(A_i)$$

البرهان: نشكل الحوادث التالية:

$\cap=\phi$

$$B_1 = A_1$$
$$B_2 = A_2\setminus A_1$$
$$B_3 = A_3\setminus(A_1\cup A_2)$$
$$\vdots$$
$$B_n = A_n\setminus\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)$$

نلاحظ أن الأحداث $(B_i)_{i\geq 1}$ متنافية مثنى مثنى

$$\Rightarrow \boxed{P\left(\bigcup_{i\geq 1} B_i\right) = \sum_{i\geq 1} P(B_i)}$$

أيضاً نلاحظ أن:

$$\boxed{\bigcup_{i\geq 1} B_i = \bigcup_{i\geq 1} A_i}$$

$$\Rightarrow \boxed{P\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) = \sum_{i\geq 1} P(B_i)} \quad (*)$$

وأيضاً نلاحظ أن:

$$B_i \subseteq A_i \ , \ i\geq 1 \Rightarrow P(B_i) \leq P(A_i) \ , \ i\geq 1$$

نعوض في $(*)$ فنجد أن:

$$\boxed{P\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) = \sum_{i\geq 1} P(B_i) \leq \sum_{i\geq 1} P(A_i)}$$

$$P\left(\bigcap_{i\geq 1} A_i\right) \geq 1 - \sum_{i\geq 1} P(A_i')$$

البرهان:

$$P\left(\bigcap_{i\geq 1} A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i\geq 1} A_i\right)'$$

$$= 1 - P\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i'\right)$$

وحسب المتراجحة السابقة نجد أن:

$$P\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i'\right) \leq \sum_{i\geq 1} P(A_i')$$

وبالتالي: $1 - P(\bigcap_{i\geq1} A_i) \leq \sum_{i\geq1} P(A_i')$

$$\Rightarrow P(\bigcap_{i\geq1} A_i) \geq 1 - \sum_{i\geq1} P(A_i')$$

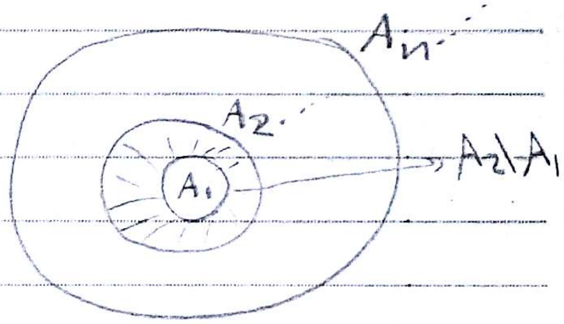
مبرهنة الاطراد المتزايد:

لتكن $\{A_n\}_{n\geq1}$ غير متناقصة (متزايدة) من الأحداث من F

(أي أن: $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$

عندئذٍ فإن:

$$P(\bigcup_{n\geq1} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$



البرهان: يمكننا كتابة ما يلي:

$$\bigcup_{n\geq1} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$$

$$= A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \dots \cup (A_n \setminus A_{n-1}) \cup \dots$$

$$\Rightarrow P(\bigcup_{n\geq1} A_n) = P(A_1) + P(A_2 \setminus A_1) + \dots + P(A_n \setminus A_{n-1}) + \dots$$

$$= P(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} P(A_n \setminus A_{n-1})$$

$$= P(A_1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{k=n} P(A_k \setminus A_{k-1})$$

/ /

لكن يمكن كتابة : $A_n = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \dots \cup (A_n \setminus A_{n-1})$

تناهي

$$\Rightarrow P(A_n) = \boxed{P(A_1)} + \sum_{K=2}^{n} P(A_K \setminus A_{K-1})$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} P(A_n) = P(A_1) + \lim_{K \to \infty} \sum_{K=2}^{n} P(A_K \setminus A_{K-1})$$

$$\boxed{\Rightarrow P\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)}$$

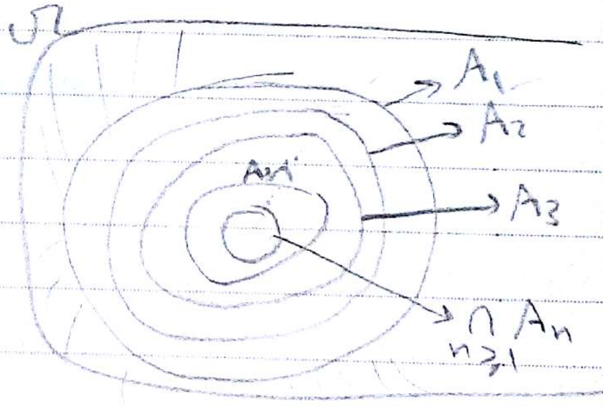
خاصية الاستمرار من الأدنى

مبرهنة الاطراد المتناقص:

لتكن $\{A_n\}_{n \geq 1}$ متتالية غير متزايدة (متناقصة) من الأحداث من F

(أي أن : $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$)

فإن : $P\left(\bigcap_{n \geq 1} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$



البرهان : بما أن : $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$

فإن : $A_1' \subseteq A_2' \subseteq \dots \subseteq A_n' \subseteq \dots$

وبالتالي حسب المبرهنة السابقة :

$$P\left(\bigcup_{n\geq 1} A'_n\right) = \lim_{n\to\infty} (A'_n)$$

لكن:

$$P\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) = 1 - P\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right)'$$

دومورغان

$$= 1 - \left(\bigcup_{n\geq 1} A'_n\right)$$

$$P(A'_n) = \boxed{1 - P(A_n)}$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - P(A_n)\right)$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

$$\Rightarrow \boxed{P\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)}$$

هنا صيغة الاستمرار من الأعلى

خاصية الاستمرار للقياس الاحتمالي:

إذا كانت $(A_n)_{n\geq 1}$ متتالية مطردة (متزايدة باطراد أو متناقصة باطراد) من الأحداث من F فإن:

$$\boxed{P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)}$$

/ /

مبرهنة التكافؤ في النهايات في الاحتمالات:

ليكن (Ω, F, P) فضاءً احتماليا عندئذٍ الشروط الآتية متكافئة:

1- قياس احتمالي جمعي تام:

$$P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum P(A_n)$$

من أجل متتالية متنافية مثنى مثنى.

2- إذا كانت $(A_n)_{n\geq 1}$ غير متناقصة باطراد فإن:

$$P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

3- إذا كانت $(A_n)_{n\geq 1}$ غير متزايدة باطراد فإن:

$$0 = P\Big(\underbrace{\bigcap_{n\geq 1} A_n}_{\phi}\Big) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

4- إذا كانت (A_n) غير متزايدة (متناقصة) وكان $\bigcap_{n\geq 1} A_n = \phi$ فإن:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0}$$

((البرهان غير مطلوب))

$1 \Leftarrow 4 \Leftarrow 3 \Leftarrow 2 \Leftarrow 1$

تمرين: يوجد في صف سبعة طلاب وخمس طالبات، المطلوب:

أ- كم عدد الطرق التي يمكن أن يختار بها المدرس لجنة مؤلفة من أربعة من الصف ؟

الحل: عدد الطرق لاختيار لجنة مؤلفة من أربعة أشخاص

$$|\Omega| = C_4^{12} = \frac{12!}{4!\ 8!} = 495$$

ب- بكم طريقة منها توجد في اللجنة طالبة وثلاثة طلاب وما احتمال ذلك

الحل:

$$|A| = C_3^7 \times C_1^5$$

$$= 35 \times 5 = 175 \text{ طريقة}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{175}{495} = 0,35 \Leftarrow$$

ج- بكم طريقة منها توجد في اللجنة طالبتان وما احتمال ذلك؟

الحل

$$|B| = C_2^7 \times C_2^5 = 21 \times 10 = 210$$

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{210}{495} = 0,42 \Leftarrow$$

د- بكم طريقة منها توجد في اللجنة طالبة واحدة على الأقل وما احتمال ذلك

الحل:

$$|C| = C_3^7 C_1^5 + C_2^7 C_2^5 + C_1^7 C_3^5 + C_0^7 C_4^5$$

$$= 175 + 210 + 70 + 5 = 460$$

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{460}{495} = 0,929$$

هـ- بكم طريقة منها توجد في اللجنة طالب واحد على الأكثر

الحل

$$|\Delta| = C_1^7 C_3^5 + C_0^7 C_4^5$$

$$= 70 + 5 = 75$$

$$\Rightarrow P(\Delta) = \frac{|\Delta|}{|\Omega|} = \frac{75}{495} = 0,15$$

و - بكم طريقة منها تكون اللجنة من جنس واحد وما احتمال ذلك.

الحل:

$$|E| = C_4^7 \, C_0^5 + C_0^7 \, C_4^5$$

$$= 5 + 35 = 40$$

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{40}{495} = 0,08$$

تمرين: سحبت ورقتان بطريقة عشوائية من بين $\boxed{10}$ ورقات مرقمة من 1 ← 10، أوجد احتمال أن يكون مجموعهما فرديا إذا تم السحب:

5 فردي
5 زوجي

1. الورقتين معاً.
2. ورقة بعد الأخرى بدون إعادة.
3. ورقة بعد الأخرى مع إعادة.

الحل:

1.

$$|\Omega| = C_2^{10} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$$

$$|A| = C_1^5 \times C_1^5 = 5 \times 5 = 25$$

$$\Rightarrow P|A| = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{25}{45} = 0,56$$

2.

فردي زوجي أو زوجي فردي

$$|B| = C_1^5 \, C_1^5 + C_1^5 \, C_1^5 = 50$$

$$|\Omega| = C_1^{10} \times C_1^9 = 90$$

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{50}{90}$$

/ /

3

$$|C| = C^5_1 \, C^5_1 + C^5_1 \, C^5_1$$

$$= 25 + 25 = 50$$

السحب مع اعادة.

$$|\Omega| = C^{10}_1 \times C^{10}_1 = 100$$

$$\Rightarrow P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{50}{100} = 0{,}5$$

انتهت المحاضرة الرابعة ☺