Syria Math

الجبر الخطي ١

الدكتور :

المحاضرة : الأولى

التاريخ : ١٣/١٠/٢٠١٦

Web: www.syriamath.net group: Improve our mathematics

الجبر الخطي (١)

* مدخل إلى البنى الجبرية :

لتكن (A,B) مجموعتين غير خاليتين نعرف الجداء الديكارتي $A\times B$ للمجموعتين A,B بأنه

$$A\times B=\{(x,y):x\in A,y\in B\}$$

يمكن تعميم هذا المفهوم على عدد منتهٍ في المجموعات اذا كانت :

$$A_1,A_2,A_3,\ldots\ldots A_n$$

مجموعات غير خالية عددها (n)

فإننا نرمز للجداء الديكارتي للمجموعات : $A_1,A_2,A_3,\ldots\ldots A_n$ ب

الرمز $\prod_{i=1}^{n}A_i$ ونعرفه كمايلي :

$$\prod_{i=1}^{n}A_i=\{(a_1,a_2,\ldots\ldots a_n)\}$$

* متى نقول عن تركيبين انهما متساويان ؟

اذا كان الأول يساوي الأول والثاني يساوي الثاني (أي العناصر متساوية)

* ملاحظة : نقول عن $a(a_1,a_2,a_3,\ldots\ldots a_n)$ و $b(b_1,b_2,b_3\ldots\ldots b_n)$

في الجداء الديكارتي انهما متساويان اذا وفقط اذا كان :

$a_i=b_i$ في اجل $i=1,2,\ldots.n$ اي ان

$$(a_1,a_2,\text{——}\,a_n)=(b_1,b_2\ldots\ldots b_n)\iff a_i=b_i\,;\,\forall i\in\{1,2,\ldots n\}$$

* تعريف : لتكن A,B مجموعتين غير خاليتين ولتكن G مجموعة جزئية في جداء ديكارتي

$A\times B$ عندئذ : أولاً : نقول عن المجموعة G انها بيان في $A\times B$.

ثانياً : اذا كانت المجموعة G مجموعة جزئية من ($A\times B$) وكانت ثنائية $(a,b)\in G$

فاننا نقول بان العنصر b من B يرتبط $b\in B$ أو يقترن بالعنصر $a\in A$ وفق

البيان G

ثالثاً : اذا كانت G بيان في $A\times B$ فإننا نقول عن الثلاثية (A,B,G) انها علاقة

ثنائية بين عناصر المجموعة A وعناصر المجموعة B ونرمز لها ب

$$\mathcal{L}(A,B,G)$$

رو — منطلقها — مستقرها

-١-

Syria Math

/ /

أي نقول إذا كانت $a \in A$ و $b \in B$ فإن b يرتبط بـ a وفق العلاقة: $a \mathcal{L} b$

إذا وفقط إذا كان: $(a,b) \in G$

إذاً: $\mathcal{L}(A,B,G)$ ثلاثية مكونة من: A منطلق B مستقر G بيان

* متى تتساوى علاقتان ؟؟ .....

تتساوى علاقتان ثنائيتان $\mathcal{L}_1(A,B,G)$ و $\mathcal{L}_2(A,B,G)$

إذا وفقط إذا كان لهما نفس المطلق ونفس المستقر والبيان نفس

أي أن $A_1 = A_2$ و $B_1 = B_2$ و $G_1 = G_2$

$\Longrightarrow \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$

* مثال: إذا كانت $A = \{2,5,9\}$ و $B\{a,b\}$

$A \times B = \{(2,a),(2,b),(5,a),(5,b)\ (9,a),(9,b)\}$

١) إذا كانت G هي مجموعة ثنائيات $G = \{(2,b),(5,b),(9,a)\}$

فهل G تشكل بياناً ؟؟ .....

نعم تشكل بياناً لأنها مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي

٢) ماذا تعني $(2,b) \in G$ ؟؟ .....

تعني أن العنصر $b \in B$ مع العنصر $2 \in A$ وفق G والعلاقة ثنائية $\mathcal{L}(A,B,G)$

٣) هل تشكل المجموعة $H = \{(2,a)\ (2,b)\ (a,5)\}$ بياناً في $A \times B$ ؟؟

لا تشكل بياناً: لأنها ليست مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي $A \times B$ لأن $(a,5) \notin A \times B$

٤) ما هو الجداء الديكارتي $B \times A$ ؟؟ ....

$B \times A = \{(a,2)\ (a,5)\ (a,9)\ (b,2)\ (b,5)\ (b,9)\}$

* ملاحظة: لكي يكون الجداء الديكارتي للمجموعة A مع نفسها يشكل $A \times A = \{(x,y) : x \in A, y \in A\}$ وهي مجموعة ثنائيات x,y حيث

$A \times A = \{(2,2)\ (2,5)\ (2,9)\ (5,2)\ (5,9)\ (5,5)\ ~~(5,5)~~\ (2,2)\ (9,5)\ (9,9)$

$x \in A\ ,\ y \in A$ ؛

-٢-

/ /

"التطبيقات":

* التطبيقات: لتكن الثلاثية $\mathcal{L}(A,B,G)$ علاقة ثنائية ما عندئذ:

نقول عن العلاقة F تطبيق إذا وفقط إذا كان: كل عنصر في المنطلق A يقابل عنصر في المستقر B ويرمز للتطبيق:

$$F: A \longrightarrow B$$

$$x \longrightarrow y = f(x)$$

* ندعو العلاقة $y=f(x)$ قاعدة ربط التطبيق f

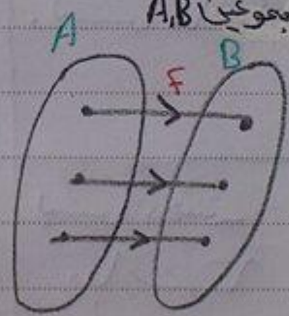
* لكل تطبيق منطلق ومستقر وقاعدة ربط وهو جزء من جداء ديكارتي:

$$G = \{(x,y) : (x,y) \in A \times B ; y = F(x)\}$$

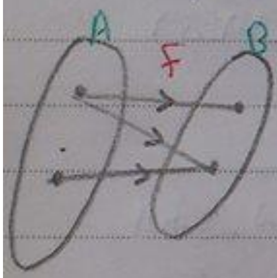
تعريف ثاني للتطبيق: الشرط اللازم والكافي يجب أن نبينه بالعلاقة $\mathcal{L}(A,B,G)$ حيث يكون تطبيق هو:

$$x_1, x_2 \in A , \{x_1 = x_2 \Longrightarrow F(x_1) = F(x_2)\}$$

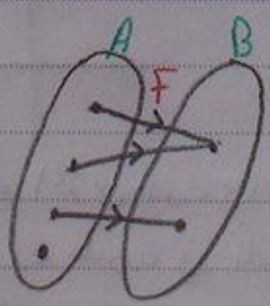
مثال: لتكن المجموعتين A,B



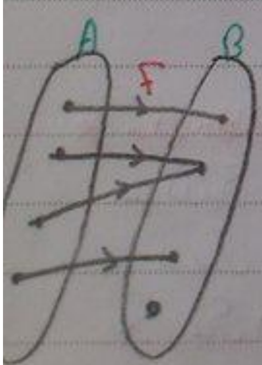
هذه العلاقة تشكل تطبيقاً



ليس تطبيقاً



ليس تطبيق



هذه العلاقة تشكل تطبيق

" التطبيقات ":

* التطبيقات: لتكن الثلاثية $\mathcal{L}(A,B,G)$ علاقة ثنائية ما عندئذ:

نقول عن العلاقة f تطبيق إذا وفقط إذا كان: كل عنصر في المنطلق A يقابل عنصر في المستقر B ويرمز للتطبيق:

$$F: A \longrightarrow B$$

$$x \longrightarrow y = f(x)$$

* ندعو العلاقة $y=f(x)$ قاعدة ربط التطبيق f

* لكل تطبيق منطلق ومستقر وقاعدة ربط وهو جزء من جداء ديكارتي:

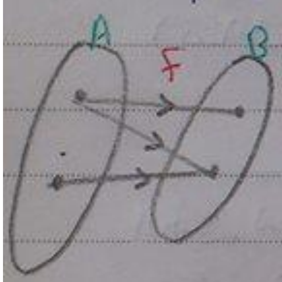
$$G = \{(x,y) ; (x,y) \in A \times B ; y = f(x)\}$$

تعريف ثاني للتطبيق: الشرط اللازم والكافي يجب أن يتحقق بالعلاقة $\mathcal{L}(A,B,G)$ حيث يكون تطبيق هو:

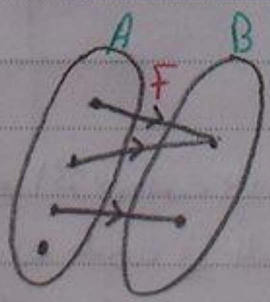
$$x_1, x_2 \in A , \{x_1 = x_2 \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2)\}$$

مثال: لتكن المجموعتين A,B

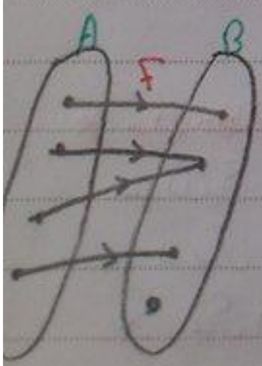
هذه العلاقة تشكل تطبيقاً



ليس تطبيقاً



ليس تطبيق



هذه العلاقة تشكل تطبيق

-٣-

/ /

* نقول عن التطبيق f أنه متباين اذا وفقط اذا تحقق الشرط التالي:

(اذا تساوت صور تساوت عناصرها) $[f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2]$ $\forall x_1, x_2 \in A$

نقول عن f أنه تطبيق متباين اذا ارتبط كل عنصر في المستقر بعنصر واحد على الأكثر في المطلق ((مع مراعاة شروط تحقق التطبيق))

* نقول عن التطبيق f أنه غامر اذا وفقط اذا تحقق الشرط التالي

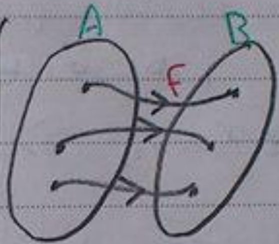
$\forall y \in B : \exists x \in A ; f(x) = f$

أي كل عنصر من المستقر يرتبط بعنصر واحد على الأقل في المنطلق

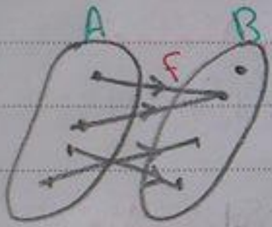
* نقول عن تطبيق f أنه تقابل اذا وفقط اذا كان التطبيق f متباينا وغامراً

* أمثلة:

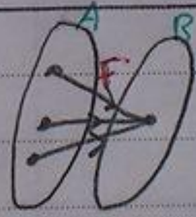
تطبيق: متباين وغامر أي (تقابل).



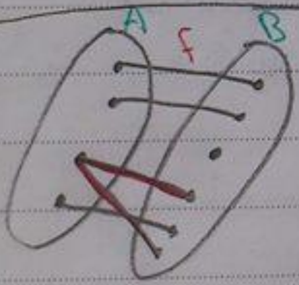
التطبيق ليس متباين وليس غامراً



الطبيق ليس متباينا ولكنه غامر.



ليس تطبيقا مباشرةً



* ملاحظات:

١- لا يمكن لعنصر من المنطلق أن يكون له أكثر من صورة في المستقر

٢- لا يمكن لعنصر من المطلق ألا يكون له صورة في المستقر

٣- يمكن أن يكون لعنصر في المنطلق أكثر من صورة في المستقر (غامراً)

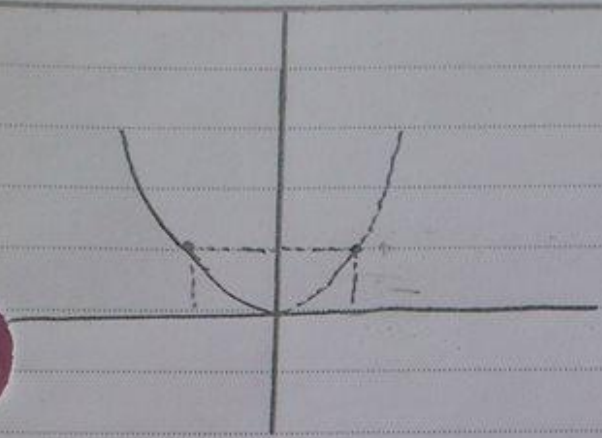
٤- يمكن أن يكون عنصر في المستقر ليس صورة لأي عنصر في المنطلق

-٤-

مثال: $F(x)\ R\to R$

هو تطبيق:

ليس متباين وليس غامراً



*تعريف:

نقول عن التطبيق $I_A: A\to A$ انه تطبيق مطابق في مجموعة A اذا وفقط اذا كان لكل عنصر $x\in A$ يرتبط بنفسه ونرمز لذلك بالرمز I_A ايا

$I_A: A\to A$ وقاعدة ربطه $a\in A$ فإن $I_A(a)=a$

انتهت المحاضرة

اعداد: فاطمة ★★ منى شغل