Syria Math

التحليل ١

الدكتور : نايف طلي

المحاضرة : الأولى

التاريخ : ٢٠١٦/١٠/١٣

١) الأعداد الطبيعية:

$$\mathrm{N} = \{0,1,2,3,4,\dots\}$$

كما سنتعرف في الجبر أنها قابلة للعد (يمكن سرد عناصرها)، أما تعريفها الرياضي: كل مجموعة يمكن جعل منها تطبيق مطابق بينها وبين الأعداد الطبيعية تسمى مجموعة محدودة.

أهم صفاتها:

- غير منتهية
- $(n,+)$ الأعداد الطبيعية مغلقة بالنسبة للجمع

$$\forall a,b \in \mathbb{N} \Rightarrow a+b \in \mathbb{N}$$

- $(n,\times)$ الأعداد الطبيعية مغلقة بالنسبة للضرب

$$\forall\ \mathrm{a,b} \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathrm{a} \times \mathrm{b} \in \mathbb{N}$$

- $(n,-)$ الأعداد الطبيعية غير مغلقة بالنسبة للطرح
- $(n,\div)$ الأعداد الطبيعية غير مغلقة بالنسبة للقسمة

مجموعة الأعداد الأولية:

$$P = \{2,3,5,7,11,\dots\}$$

نقول عن عدد إنه أولي إذا كان العدد لا يقبل القسمة إلا على نفسه وعلى الواحد(الواحد ليس عدد أولي)

يمكن أن نعرف بطريقة أخرى هو العدد الذي له قاسمان مختلفان فقط نفسه والواحد.

ليس لها صيغة، ليس هناك تركيبة معينة تولد الأعداد الأولية ، لها صفة فقط، هذه هي الصفة(التعريف) أي عدد طبيعي يمكن أن يكتب بدلالة الأعداد الأولية إلى أس.

نظرية:

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^* \quad n = p_1^{m_1}.p_2^{m_2}.\dots.p_r^{m_r} \ ;p_i \in P\ ,m_i \in \mathbb{N}$$

أمثلة:

$$12 = 2^2 \times 3 \quad , \quad 10 = 5^1 \times 2^1$$

أي عدد طبيعي يمكن كتابته بهذا الشكل: كتابة العدد بالعوامل الأولية تبدأ بالعدد 2 الأساس، 3 الأساس وبعد ذلك نأخذ 5 وهكذا...

قواسم عدد:

القاسم المشترك الأكبر: نأخذ العوامل المشتركة بأصغر أس.

مثال: $k(12,10) = 2$

المضاعف المشترك الأصغر: نأخذ العوامل المشتركة وغير المشتركة بأكبر أس.

مثال: $M(10,12) = 60$

أمثلة:

$$k(12,15,10) = 1$$

$$M(12,10,15) = 60$$

ملاحظة: لإيجاد قواسم عدد نبدأ بالعدد 2 لأن جميع الأعداد تقبل القسمة على 1

مثال: $k(9,10) = 1$

تذكرة: يقبل العدد القسمة على2 إذا كان آحاده زوجياً، يقبل العدد القسمة على 3 إذا كان مجموع الأرقام يقبل القسمة على 3، يقبل القسمة على 4 إذا كان الآحاد والعشرات معاً يقبل القسمة على 4، يقبل القسمة على 5 إذا كانت آحاده 0 أو 5 وهكذا... هناك بحوث بهذا الموضوع ومن أراد هناك مرجع بهذا البحث يسمى نظرية الأعداد

الأعداد الزوجية: $n = 2k \ ; \ k \in \mathbb{N}$

الأعداد الفردية: $n = 2k + 1 \ ; \ k \in \mathbb{N}$

نتائج:

عدد فردي × عدد زوجي= عدد زوجي

عدد زوجي × عدد زوجي= عدد زوجي

٢) الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

- غير منتهية
- عدودة(سرد العناصر): أي إذا تم إعطاؤنا عدد نستطيع إعطاء العدد الذي قبله والذي بعده
- $(\mathbb{Z}, +)$ مغلقة
- $(\mathbb{Z}, \times)$ مغلقة
- $(\mathbb{Z}, -)$ مغلقة

❖ $(\mathbb{Z},\div)$ غير مغلقة(هناك أعداد كثيرة تكون عدد صحيح / عدد صحيح ويكون الناتج غير صحيح)

أما ما يتعلق بالأعداد الأولية وغيرها تقوم بسحب الإشارة وننظر إلى العدد إذا كان عدد اولي أم لا

السطر الأفقي يمثل البسط والعمود يمثل المقام

٣) الأعداد العادية:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n}\ ; m \in \mathbb{Z}\ , n \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

❖ غير منتهية
❖ محدودة
❖ $(\mathbb{Q},+)$ مغلقة
❖ $(\mathbb{Q},-)$ مغلقة
❖ $(\mathbb{Q},\times)$ مغلقة
❖ $(\mathbb{Q}^*,\div)$ مغلقة
❖ $(\mathbb{Q},\div)$ غير مغلقة

	.....	-2	-1	0	1	2	.....
.....	....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
-2	....	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	.....
-1	....	2	1	0	-1	-2	.....
0	\\\\\	\\\\\	\\\\\	\\\\\	\\\\\\	\\\\\\	\\\\\\
1	....	-2	-1	0	1	2	.....
2	....	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

لا يجب أن يكون المقام صفر

٤) الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

❖ غير منتهية
❖ غير عدودة
❖ $(\mathbb{R},+)$ مغلقة
❖ $(\mathbb{R},-)$ مغلقة
❖ $(\mathbb{R},\times)$ مغلقة

❖ $(\mathbb{R}^*,\div)$ مغلقة

تمثل الأعداد الحقيقية بنقاط على المستقيم الموجه، هذا المستقيم الموجه يسمى محور

الصيغة الهندسية:

$$\longrightarrow \mathbb{R}$$

التمثيل العددي: بعض المؤلفون حاولوا كتابة الأعداد الحقيقية فكتبوها بالشكل التالي:

الصيغة الجبرية:

$$\mathbb{R} = \{a, a_1 a_2 \dots a_n \,; a \in \mathbb{Z} \,, a_i \in \{0,1,2,\dots,9)$$

$$\{x \leq y\} = \{x = y \text{ أو } x < y\}$$

مجموعات الأعداد الجبرية:(الأعداد الجبرية ليست عبارة عن مجموعة خاصة سنرى أنها تخترق الأعداد لكن لا تصل للأعداد الحقيقية

نقول عن عدد α أنه عدد جبري إذا كان حلاً للمعادلة:

$$(*) \quad a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \,; a_i \in \mathbb{Q}$$

مثال: هل $\sqrt{2}$ عدد جبري؟

نعم لأن هناك معادلة نستطيع أن نبنيها كما يلي :

$$x^2 - 2 = 0$$

(بحيث يكون α هو حل لهذه المعادلة)

$\sqrt{2}$ حل للمعادلة $x^2 - 2 = 0$

$$(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$$

و من المعادلة من النمط $ax + b = 0$ تستنتج أن كل الأعداد العادية جبرية

نظرية:

إذا كان للمعادلة (*) جذور في $\mathbb{Q}$ $(x=\frac{p}{q})$ فإن:

a_0 يقبل القسمة على p

a_n يقبل القسمة على q

مثال:

$$x^3-1=0$$

نأخذ a_0 ونرى ما هي قواسمه $a_0=1$ قواسمه هي $(+1,-1)$

نأخذ a_n ونرى ما هي قواسمه $a_n=1$ قواسمه هي $(+1,-1)$ لأننا في $\mathbb{Q}$ لذلك نأخذ $(+1,-1)$

إذا كان هناك حلول لهذه المعادلة في $\mathbb{Q}$ يجب أن يكون $1-$ أو 1 نجرب1:

$(x^3-1)=0$ نقسمها على $(x-1) \Leftarrow (x-1)(x^2+x+1)=0$

$$(x-1)=0 \Rightarrow x=1$$

$$(x^2+x+1)=0$$

$a_0=1$ قواسمها $(-1,+1)$، a_n+1 قواسمها $(-1,+1)$

نجرب 1: $(1)^2+1+1=0$

$3=0$ غير صحيح

نجرب 1-: $(-1)^2-1+1=0$

$1=0$ غير صحيح

إذاً لا يوجد جذور للمعادلة x^2+x+1 في $\mathbb{Q}$

مثال:

$x^2-2=0$ هذه المعادلة ليس لها جذور في $\mathbb{Q}$

$a_0=2$ قواسمها $(-2,-1,1,2)$، $a_n=1$ قواسمها $(-1,1)$

نجرب $-2,-1,1,2$ لا نجد حل.

يمكن العودة للكتاب لمزيد من الأمثلة.

طرائق البرهان:

- ✓ البرهان بالطريقة المباشرة
- ✓ البرهان بطريقة المكافئ العكسي
- ✓ البرهان بطريقة التجربة
- ✓ البرهان بواسطة الحالات
- ✓ البرهان بطريقة نقض الفرض
- ✓ البرهان بواسطة المثال العكسي
- ✓ البرهان بطريقة الاستقراء

الطريقة المباشرة:

أمامنا قضية p نريد أن نصل إلى القضية q أي نريد أن نثبت صحة القضية q بناءً على أن هذه القضية صحيحة، جرت العادة أن نبدأ -مثل الجبريين- من علاقة لننتقل إلى علاقة أخرى إلى علاقة أخرى ثالثة رابعة...وفق قواعد رياضيات وقوانين معينة حتى نصل لـq، هذا ما يسمى بالطريقة المباشرة(أي أننا نبدأ بنقطة فننتهي بالأخيرة)،

هذه إحدى الطرق البسيطة، يمكن أيضاً بنفس الطريقة المباشرة ابتكار فكري أيضاً صحيح أن نبسط p ونبسط q فنصل إلى علاقة تساوي بين تبسيط الأولى والثانية.

مثال:

أثبت أنه إذا كان n عدداً فردياً فإن n^2 عدد فردي.

بما أن n عدد فردي فهو يكتب

بالشكل التالي:

$$n = 2k + 1; k \in \mathbb{N} = \{0,1,..\}$$

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$= 2(2\mathrm{k}^2 + 2k) + 1$$

$$= 2l + 1 \,;\, l \in \mathbb{N}$$

يكون النقاش على الشكل التالي:

هل $(2k^2 + 2k)$ ينتمي لـ$\mathbb{N}$ أم لا

$k \in \mathbb{N}$ بالفرض، تربيع k يعني جداؤه، وبما أن $\mathbb{N}$ مغلقة بالنسبة للجداء إذاً $k^2 \in \mathbb{N}$ ضربه بعدد 2 (الضرب مغلق بالنسبة لـ$\mathbb{N}$) إذاً

$2k^2 \in \mathbb{N}$

جمع $2k$ بما أن $2k \in \mathbb{N}$ إذاً

$(2k^2 + 2k) \in \mathbb{N}$

إذاً n^2 عدد فردي

البرهان بطريقة المكافئ العكسي:

إذا لاحظنا أن الانتقال من p إلى q فيه صعوبة فإننا يمكننا تحويل القضية بالشكل التالي:

نفي الناتج(q) فإذا استطعنا إثبات نفي p نكون قد قمنا بالحل:

بالمنطق الرياضي: $(p \to q) \Leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$

مثال:

إذا كان n^2 عدداً زوجياً فإن n عدد زوجي.

n^2 عدد زوجي $\to$ n عدد زوجي

ننفي: n^2 عدد فردي $\to$ n عدد فردي

وقد أثبتنا هذه العلاقة بالمثال السابق.

هذه هي فكرة البرهان بواسطة المكافئ العكسي، هذا يعطينا فكرة إضافية بحيث أننا إذا لم نكن نستطيع أن نثبت من $p \to q$ نحاول العكس، ننفي q فإذا وصلنا إلى نفي p نكون قد برهنا.

ملاحظة: علينا إثبات العلاقة التي نحصل عليها من نفي العلاقة الأساسية

الطريقة التجريبية:

مثال: أثبت أن $n^2 + n + 41$ عدد أولي حيث: $n \in \{1,2,3,4\}$

نبدأ بتجربة الأعداد، نعوضها ويجب أن نحصل على عدد أولي:

نعوض 1: $1^2 + 1 + 41 = 43$ وهو عدد أولي

نعوض 2: $(2)^2 + 2 + 41 = 47$ وهو عدد أولي

نعوض 3: $(3)^2 + 3 + 41 = 53$ وهو عدد أولي

نعوض 4: $(4)^2 + 4 + 41 = 61$ وهو عدد أولي

طريقة الحالات:

أن نقوم بتقسيم المسألة لعدة حالات.

مثال: أثبت أن $n \in \mathbb{N}$; $n^2 + n$ عدد زوجي

$$n^2 + n = n(n+1)$$

يمكننا أن نقسم لحالات:

إما n عدد فردي $\Leftarrow$ $(n+1)$ عدد زوجي $\Leftarrow$

عدد فردي×عدد فردي= عدد زوجي

أو n عدد زوجي: $\Leftarrow$ $(n+1)$ عدد فردي $\Leftarrow$

عدد فردي×عدد زوجي=عدد زوجي

البرهان بواسطة نقض الفرض

مثال : في النهاية التالية يجب أن نميز الحالات الموضحة:

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & : |a| < 1 \\ 1 & : a = 1 \\ +\infty & : a > 1 \\ -\infty & : a < 1 \\ \text{غير موجودة} & : a = -1 \end{cases}$$

مثال: أثبت أن $\sqrt{2}$ لا يمكن أن يكتب على شكل عدد عادي

$q, p \in \mathbb{Z}$ عددان أوليان فيما بينهما: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$

$$k(p,q) = 1$$

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

q^2 عدد طبيعي وعندما ضربناه بـ2 أصبح عدد زوجي

$\Leftarrow$ p^2 عدد زوجي $\Leftarrow$ p عدد زوجي

إذاً نستطيع كتابته بالشكل $2l$

$$(2l)^2 = 2q^2$$

$$2l^2 = q^2$$

من هذه العبارة نستنتج أن q^2 عدد زوجي $\Leftarrow$ q عدد زوجي، أصبح p و q عددان زوجيان فهما يقبلان القسمة على 2 ونحن فرضناهما عددان أوليان فيما بينهما، وهكذا وصلنا إلى نقض ما فرضناه، الفرض الذي بدأنا به أوصلنا إلى هذا التناقض.

ملاحظة: هناك طرق أبسط لإثبات أن $\sqrt{2}$ ليس عدد عادي.

طريقة المثال المعاكس:

برهن على خطأ العبارة:

إذا كان n عدداً طبيعياً فإن $n^2 + n + 41$ عدد أولي

$$n = 41$$

$$w = (41)^2 + (41) + (41)$$

$$w = (41)(43)$$

أصبح w عبارة عن جداء عددين ولو أنه كان عدداً أولياً يجب أن يكون عبارة عن جداء نفسه والواحد فقط، إذاً هو ليس عدد أولي مما يثبت خطأ العبارة

ملاحظة: يكفي لإثبات أن عبارة خاطئة إيجاد مثال واحد يثبت خطأ العبارة.

"انتهت المحاضرة"