Subject: « 1 » المحاضرة Day: 3 Month: 10 Year: 2016

* مجموعات الأعداد:

الأعداد الطبيعية: هي الأعداد التي تبدأ من الواحد ثم بإضافة واحد كل مرة نحصل على عدد طبيعي جديد وهكذا...

الأعداد الكلية: هي تشمل جميع الأعداد الطبيعية بالإضافة للصفر.

الأعداد الصحيحة: تضم الأعداد الكلية بالإضافة للأعداد السالبة.

ملاحظة: إن عمليتا الجمع والضرب المألوفتين ممكنتان دوماً في مجموعة الأعداد الطبيعية N بينما باقي العمليات غير ممكنة بالضرورة.

في مجموعة الأعداد الصحيحة Z بالإضافة إلى عمليتي الجمع والضرب فإن عملية الطرح ممكنة دوماً لكن عملية القسمة تبقى غير ممكنة دوماً في هذه المجموعة.

الأعداد العادية Q: هي كل عنصر ينتمي المجموعة التالية:

$$Q=\{\frac{m}{n} ; m,n\in Z , n\neq 0\}$$

ونلاحظ أنه باعتبار $n=1$ فإنه $Z=Q$ وبالتالي أصبح لدينا

$$N\subseteq Z\subseteq Q$$

ملاحظة: يتميز العدد العادي بأنه يمكن أن يكتب على شكل عدد عشري منتهي مثل:

$\frac{1}{4}=0.25$

أو عدد عشري غير منتهي لكنه دوري مثل:

$\frac{1}{3}=0.3333$

نلاحظ أن عملية القسمة دوماً ممكنة في Q ولكن عملية الجذر لعدد موجب ليست ممكنة دوماً في Q

الأعداد الحقيقية هي مجموعة الأعداد العادية بالإضافة للأعداد الغير العادية

حيث الأعداد غير العادية هي الأعداد التي تكتب على شكل عدد عشري غير منتهي وغير دوري مثل:

3.1457728

نلاحظ أنه لا يمكن إيجاد جذر العدد السالب

Subject: Day: Month: 1 Year:

ولذلك اقترح العلماء أن
$i^2 = -1$
ومنه يوجد لل -1 جذر وهو i

الفصل الأول :
مجموعة الأعداد العقدية

تعريف العدد العقدي :
نسمي عدداً عقدياً هو كل ثنائية مرتبة من الأعداد الحقيقية أي:

$$\mathbb{C} = \{ z = (\alpha , \beta) ; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$$

فإذا كان $z = (\alpha, \beta)$ عدداً عقدياً فإننا نسمي α الجزء الحقيقي لـ z ونسمي β الجزء التخيلي لـ z

ملاحظة: كلمة مرتبة مهمة وتعني أن ترتيب عناصر الثنائية مهم.

مثال: العدد العقدي $(3, -2)$ يختلف عن العدد العقدي $(-2, 3)$

التساوي في $\mathbb{C}$:

نقول عن عددين عقديين أنهما متساويان أي:
$z_1 = (\alpha_1, \beta_1)$
$z_2 = (\alpha_2, \beta_2)$

$$\boxed{z_1 = z_2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \wedge \beta_1 = \beta_2}$$

البنى الجبرية للمجموعة $\mathbb{C}$:

$(\mathbb{C}, +)$ زمرة تبديلية : "برهن ذلك"
نعرف عملية الجمع كما يلي:
$(\alpha_1, \beta_1) , (\alpha_2, \beta_2) \in \mathbb{C}$
نأخذ:

$$\boxed{(\alpha_1, \beta_1) + (\alpha_2, \beta_2) = (\alpha_1 + \alpha_2 , \beta_1 + \beta_2)}$$

$(\mathbb{C}^*, \cdot)$ زمرة تبديلية : "برهن ذلك"
نعرف عملية الضرب كما يلي:
$(\alpha_1, \beta_1) , (\alpha_2, \beta_2) \in \mathbb{C}$

$$(\alpha_1, \beta_1) \cdot (\alpha_2, \beta_2) = (\alpha_1 \cdot \alpha_2 - \beta_1 \cdot \beta_2 , \alpha_1 \cdot \beta_2 + \alpha_2 \cdot \beta_1)$$

ملاحظة: الحقل $\mathbb{C}$ لا يحوي قواسم الصفر أي لا يوجد عددين عقديين غير صفريين جداؤهما صفر

سؤال: هل $\mathbb{C}$ مجموعة مرتبة كلياً ؟!
نعم

$$(\alpha_1, \beta_1) \le (\alpha_2, \beta_2) \Leftrightarrow (\alpha_1 < \alpha_2) \vee (\alpha_1 = \alpha_2 \wedge \beta_1 < \beta_2)$$

هل $\mathbb{C}$ حقل مرتب كلياً ؟!

لأن:

- يجب أن نثبت أن أي علاقة ترتيب كلي على $\mathbb{C}$ لن تكون منسجمة مع قانوني التشكيل الجمع والضرب.
- مربع أي عنصر في حقل هو عدد أكبر أو يساوي الصفر والصفر في الحقل هو حيادي الجمع.
- $\mathbb{R}$ حقل مرتب كلياً ولكن $\mathbb{C}$ حقل غير مرتب كلياً.

ملاحظة:

- نقول عن حقل أنه مرتب كلياً اذا كان مربع أي عدد مربعه موجب
- الانسجام: يعني أنه إذا أضفنا عدد لطرفي متراجحة فلن تتغير المتراجحة أو إذا ضربنا بعدد موجب ذلك أيضاً لا يغير من جهة المتراجحة

لا يجوز لنا مقارنة الأعداد العقدية لأن $\mathbb{C}$ ليس حقل مرتب كلياً.

تمرين: أثبت أن الحقل $\mathbb{C}$ ليس حقلاً مرتباً كلياً.

نعرف عملية ضرب عدد عقدي بعدد سلمي (حقيقي)

$$\forall z=(\alpha,\beta)\in\mathbb{C},\ \lambda\in\mathbb{R}:$$
$$\lambda\cdot z=(\lambda\cdot\alpha,\lambda\cdot\beta)$$

تمرين: أثبت أن $(\mathbb{C},+,\times)$ فضاء متجهي؟!

الشكل الجبري للعدد العقدي

إن التطبيق الذي يقرن كل عدد حقيقي α بالعدد العقدي $(\alpha,0)$ هو تماثل حقلي:

$$\mathbb{R}\longrightarrow\{(\alpha,0);\ \alpha\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{C}$$
$$\alpha\longmapsto(\alpha,0)$$

يمكن اعتبار $\mathbb{R}$ جزء من $\mathbb{C}$ وذلك باعتبار العدد الحقيقي α هو ذاته العدد العقدي $(\alpha,0)$ أي أن:

$$\alpha=(\alpha,0)$$