هندسة تحليلية

الدكتورة: ميسم جديد

المحاضرة : الخامسة

إعداد : منى + راما

هندسة تحليلية . المحاضرة الخامسة . العبارات متعامدة

تعيين المستوي : بالحالات الآتية :

① معادلة مستوي يمر بنقطة معلومة ويعامد منحى معلوم. لتكن النقطة المعلومة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ويعامد منحى معلوم $\vec{V}(p,q,r)$ ، لتكن النقطة $M(x,y,z)$ نقطة متحركة في المستوي المطلوب عندئذ وفي جميع أوضاع النقطة M تحقق العلاقة التالية $\vec{V}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}\perp\vec{V}$

$$\vec{V}=p\vec{i}+q\vec{j}+r\vec{k}$$

$$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0)\vec{i}+(y-y_0)\vec{j}+(z-z_0)\vec{k}$$

$$\vec{V}\cdot\overrightarrow{M_0M}=p(x-x_0)+q(y-y_0)+r(z-z_0)=0$$

نفك الأقواس :

$$px-px_0+qy-qy_0+rz-rz_0=0$$

$$px+qy+rz-(px_0+qy_0+rz_0)=0$$

$$h=-(px_0+qy_0+rz_0)$$

نوضح المعادلة : $px+qy+rz+h=0$

معادلة مستوي يمر بنقطة معلومة ويعامد منحى معلوم

ببساطة : أوجد معادلة مستوي يمر بنقطة معلومة ويعامد منحى معلوم. «سؤال نظري»

تطبيق : أوجد معادلة المستوي المار بالنقطة $M_0(3,2,5)$ ويعامد المنحى $\vec{V}(1,3,4)$

$$h=-(3+6+20)=-29$$

نعوض : $x+3y+4z-29=0$

ندعو $\vec{V}$ ناظم المستوي ونرمز له بـ $\vec{N}$ ، $\vec{N}(p,q,r)$

٢ـ المستويات الخاصة :

الصيغة العامة للمستوي :

$$Q(x,y,z)\equiv px+qy+rz+h=0$$

① $h=0 \Rightarrow px+qy+rz=0$

هي معادلة مستوي يمر من مبدأ الإحداثيات

إذاً النقطة $O(0,0,0)$ تحقق هذه المعادلة.

② $r=0 \Rightarrow px+qy+h=0$

هي معادلة مستوي يوازي المحور oz لأن مسقط توجيه منحى الناظم هو $(p,q,0)$ أي أن مركبة الناظم على المحور oz معدومة، وبالتالي فإن الناظم يعامد oz ، المستوي يوازي oz.

③ $q=0 \Rightarrow px+rz+h=0$

بنفس المناقشة السابقة نجد أنه مستوي يوازي oy.

④ $p=0 \Rightarrow qy+rz+h=0$

بنفس المناقشة السابقة نجد أنه مستوي يوازي ox.

⑤ $q=r=0 \Rightarrow px+h=0 \Rightarrow \boxed{x=-\frac{h}{p}}$

إن هذه المعادلة تمثل معادلة مستوي يوازي المستوي الإحداثي oyz

⑥ $p=q=0 \Rightarrow rz+h=0 \Rightarrow \boxed{z=-\frac{h}{r}}$

وهي معادلة مستوي يوازي المستوي oxy

⑦ $p=r=0 \Rightarrow qy+h=0 \Rightarrow \boxed{y=-\frac{h}{q}}$

نحصل على معادلة مستوي يوازي المستوي oxz

ملاحظة : إذا كان h في الحالات 5,6,7 يساوي الصفر $h=0$ نحصل على المستويات الإحداثية الثلاثة.

٢ـ المعادلة الناظمية لمستوي ٢:

لإيجاد معادلة مستوي بدلالة جيوب تمام توجيه الناظم على هذا المستوي نقوم بتعويض جيوب " " " ومن ما تعلمناه سابقاً حيث تعطى جيوب تمام التوجيه بالعلاقات التالية :

$$\alpha=\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

$$\beta=\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

$$\gamma=\frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

①

تبسيط آخر يتم بتقسيم معادلة المستوي على المقدار $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ فنحصل على:

العلاقة *

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}x+\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}y+\frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}z+\frac{h}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} \;*$$

ملاحظة: من مناقشاتنا لإيجاد معادلة المستوي فرضنا أن

$$h=-(px_0+qy_0+rz_0) \qquad \vec{N}(p,q,r)$$

نلاحظ:

$$h=-(\vec{N}\cdot\vec{OM_0})$$

وكذلك لتحديد إشارة المقدار

$$\frac{h}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

في الأتي:

$$h=-|\vec{N}|\cdot|\vec{OM_0}|$$

إن $\vec{OM_0}$ بعد المستوي عن مبدأ الإحداثيات

وسنرمز لهذا الرمز d عندئذ تكون تساوي:

$$h=-|\vec{N}|\cdot d \qquad |\vec{N}|$$

بالتعويض بالمعادلة * نحصل على:

$$\alpha x+\beta y+\gamma z-d=0$$

وهذا الشكل الناظمي لمعادلة المستوي:

حيث

$$\alpha=\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},\quad \beta=\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

$$\gamma=\frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} \qquad d=\frac{-h}{|\vec{N}|}$$

٨/ الزاوية بين مستويين: لتعيين الزاوية بين مستويين نتبع الآتي: نعلم أن تقاطع هذين المستويين تشكل أربعة زوايا كل زاويتين متقابلتين متطابقتين، والزاوية الأخرى مكملة لها. لتعيين الزاوية بين المستويين ولتعيين هذه الزاوية نأخذ الزاوية بين ناظمي المستويين فإذا كان لدينا المستويين:

$$Q_1(x,y,z)\equiv p_1x+q_1y+r_1z+h_1=0$$

$$Q_2(x,y,z)\equiv p_2x+q_2y+r_2z+h_2=0$$

ناظم المستوي الأول. $\vec{N_1}(p_1,q_1,r_1)$

ناظم المستوي الثاني. $\vec{N_2}(p_2,q_2,r_2)$

لتعيين الزاوية بين المستويين:

حيث θ الزاوية بين $\vec{N_1},\vec{N_2}$

$$\cos\theta=\frac{\vec{N_1}\cdot\vec{N_2}}{|\vec{N_1}|\cdot|\vec{N_2}|}$$

٧/ معادلة مستوي يمر من ثلاث نقاط معلومة ليست على استقامة واحدة: لتكن النقاط $M_1(x_1,y_1,z_1)$ و $M_2(x_2,y_2,z_2)$ و $M_3(x_3,y_3,z_3)$ ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة

لإيجاد معادلة المستوي المار بهذه النقاط الثلاث

نفرض نقطة متحولة من المستوي المطلوب $M(x,y,z)$

عندئذ يتحقق الآتي:

نعلم أن الجداء الخارجي لمتجهين هو متجه عمودي على مستوي المتجهين أي أن الجداء الخارجي لـ M_1,M_2,M_3

$$\vec{N}=\vec{M_1M_2}\wedge\vec{M_1M_3}$$

وهو متجه عمودي على مستوي تقع فيه النقاط M_1,M_2,M_3

إذاً ردت هذه المسألة إلى الحالة الأولى وذلك بأن نأخذ الجداء الخارجي للمتجهين $\vec{M_1M_2},\vec{M_1M_3}$ ثم نأخذ إحدى هذه النقاط الثلاث بتعبير آخر:

$$\vec{N}=\vec{M_1M_2}\wedge\vec{M_1M_3}$$

نفرض $M(x,y,z)$ نقطة متحولة من المستوي المطلوب

عندئذ ومن أجل جميع أوضاع النقطة M، $M_1M\perp M$

ومنه يكون $\Leftarrow\Rightarrow$ $\vec{M_1M}\cdot\vec{N}=0$

$$\Rightarrow \vec{M_1M}\cdot(\vec{M_1M_2}\wedge\vec{M_2M_3})=0$$

"الجداء المختلط الأشعة الثلاثة"

ومن نشر المحدد:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

نحصل على معادلة مستوي يمر بثلاث النقاط المعلومة الغير واقعة على استقامة واحدة.

«سهو الدوكي»

2

٢ نقاط تقاطع مستوٍ مع المحاور الإحداثية ٢

1) إذا كان المستوي يقطع المحور ox فإن $\boxed{y=z=0}$

$\Rightarrow px+h=0 \Rightarrow x=-\frac{h}{p}=a.$

ومنه نقطة تقاطع المستوي مع المحور ox $(a,0,0)$

2) إذا كان المستوي يقطع المحور oy فإن $\boxed{x=z=0}$

$\Rightarrow qy+h=0 \Rightarrow y=-\frac{h}{q}=b$

ومنه نقطة تقاطع المستوي مع المحور oy $(0,b,0)$

3) إذا كان المستوي يقطع المحور oz فإن $\boxed{x=y=0}$

$\Rightarrow rz+h=0 \Rightarrow z=-\frac{h}{r}=c$

ومنه نقطة تقاطع المستوي مع المحور oz فإن $(0,0,c)$

٢ معادلة مستوٍ يمر من نقطة معلومة ويوازي شعاعين معلومين ٢:

لإيجاد معادلة هذا المستوي نرد هذه الحالة إلى الحالة الأولى حيث أنه لدينا نقطة معلومة لتكن $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ولدينا شعاعين معلومين $\vec{V}_1,\vec{V}_2$، المستوي المطلوب يوازي هذين الشعاعين وبالتالي فإن ناظمة المستوي يعامد الشعاعين $\vec{V}_1,\vec{V}_2$، للحصول على مركبات الناظم نأخذ الجداء الخارجي لـ $\vec{V}_1,\vec{V}_2$ أي $\vec{N}=\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2$ نفرض $M(x,y,z)$ نقطة متحولة من المستوي المطلوب عندئذ يتحقق ما يلي:

$\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{N}=0 \Rightarrow$

$\overrightarrow{M_0M}\cdot(\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2)=0.$

وبالتالي نحصل على معادلة المستوي المطلوب من فك المحدد:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}=0.$$

بفك هذا المحدد نحصل على المعادلة المطلوبة.

انتهت المحاضرة

3