المحاضرة الثانية

النظرية الأساسية لحركة الجسم الصلب: (هامة)

النص: (سؤال يطلب به ذكر النص مع البرهان أما إذا كتب النص نثبت جهة واحدة فقط)
الشرط اللازم والكافي كي تتحرك مجموعة مادية كمجموعة متماسكة (كجسم صلب) هو أن يتساوى مسقطا سرعتي نقطتين ما (أي نقطتين) من هذا الجسم على المستقيم الواصل بين هاتين النقطتين.

البرهان: $\boxed{\Leftarrow}$

لنفرض أن المجموعة كمتماسكة وأن: $\forall A, B \in S$

ولنبرهن أن: $\text{proj}_{AB}\ \vec{V}(A) = \text{proj}_{AB}\ \vec{V}(B)$ ← يعني مسقط سرعة النقطة A على المستقيم AB

من تعريف الجسم الصلب يمكننا كتابة علاقة البعد الثابت بين النقطتين A, B بالشكل: $|\vec{AB}| = C$

$$\forall A, B \in S \ ; \ |\vec{AB}| = C \Leftrightarrow |\vec{AB}|^2 = C^2$$

باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة للزمن:

$$2\vec{AB}\,\frac{\partial \vec{AB}}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \vec{AB}\,\frac{\partial \vec{AB}}{\partial t} = 0$$

هام التكافؤ كل 5 علامات

$$\Leftrightarrow \vec{AB}\left[\frac{\partial}{\partial t}(\vec{O_1B} - \vec{O_1A})\right] = 0$$

O_1 نقطة ثابتة في الفراغ
$O_1 \in$ الفراغ الثابت
$\vec{AB} = \vec{AO_1} + \vec{O_1B}$
$= -\vec{O_1A} + \vec{O_1B}$

$$\Leftrightarrow \vec{AB}\left[\frac{\partial \vec{O_1B}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{O_1A}}{\partial t}\right] = 0$$

مشتق شعاع الموضع بالنسبة للزمن هو السرعة

$$\Leftrightarrow \vec{AB}(\vec{V}(B) - \vec{V}(A)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{AB}\cdot\vec{V}(B) = \vec{AB}\cdot\vec{V}(A)$$

$$\Leftrightarrow |\vec{AB}|\cdot|\vec{V}(B)|\cdot\cos\varphi = |\vec{AB}|\cdot|\vec{V}(A)|\cdot\cos\theta$$

تذكرة:
الجداء العددي لشعاعين $\vec{X}$ ، $\vec{Y}$ يُعطى بالشكل:
$\vec{X}\cdot\vec{Y} = |\vec{X}|\cdot|\vec{Y}|\cdot\cos\theta$ (حيث θ الزاوية المحصورة بين الشعاعين)

$$\Longleftrightarrow |\vec{v}(B)|\cdot\cos\varphi = |\vec{v}(A)|\cdot\cos\theta$$

$$\Longleftrightarrow \underset{AB}{\text{proj}}\,\vec{v}(B) = \underset{AB}{\text{proj}}\,\vec{v}(A)$$

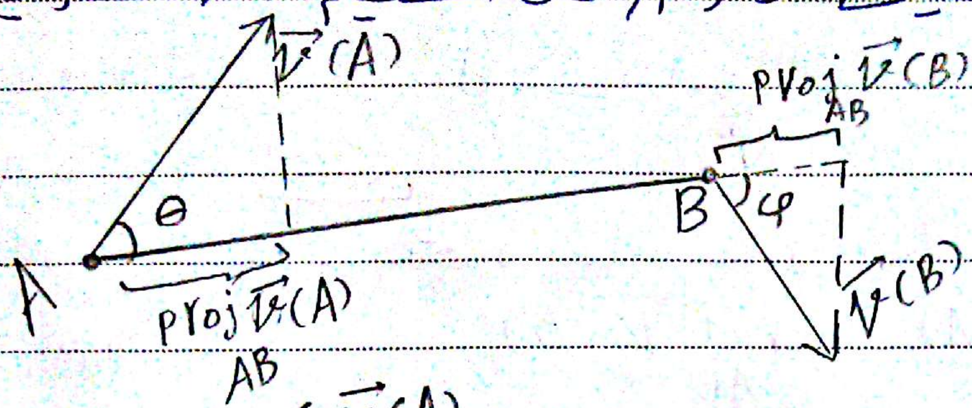
فالمساقط لسرعتي نقطتين B و A على المستقيم AB متساوية

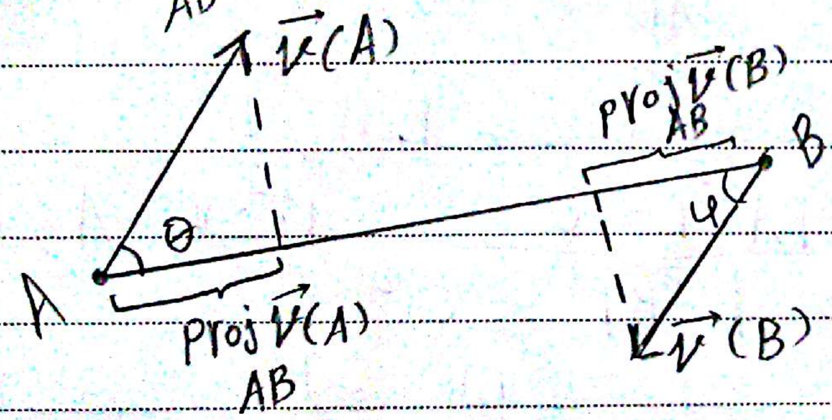
توضيح بالرسم:

نرسم شعاع سرعة A $\vec{v}(A)$

وشعاع سرعة B $\vec{v}(B)$

اختيارياً



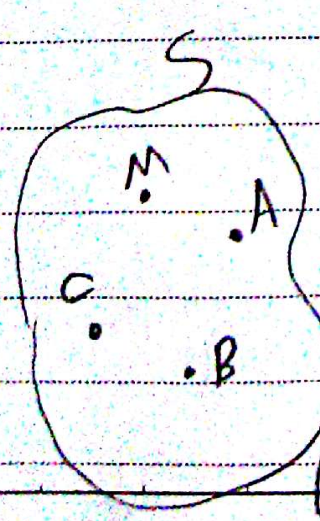


يكفي إثبات طرف واحد من البرهنة

نتيجة:

بالاعتماد على النظرية الأساسية السابقة يمكن تعيين سرعة أي نقطة من الجسم بمعرفة ثلاث نقاط A, B, C وسرع هذه النقاط أي $\vec{v}(A), \vec{v}(B), \vec{v}(C)$ بشرط أن C و B و A ليست على استقامة واحدة، والنقطة المطلوب تعيين سرعتها ليست على استقامة واحدة مع أي نقطتين من النقط الثلاث A, B, C

شرح النتيجة:



لتعيين سرعة النقطة M حيث: $M \in S$

يجب معرفة: $A, B, C \in S$

و: $\vec{v}(A), \vec{v}(B), \vec{v}(C)$

ومنه: $M(x, y, z)$
$\vec{v}(M) = (\overset{?}{\alpha}, \overset{?}{\beta}, \overset{?}{\gamma})$

$$\vec{V}(M)\cdot\vec{AM}=\vec{V}(A)\cdot\vec{AM}$$
$$\vec{V}(M)\cdot\vec{BM}=\vec{V}(B)\cdot\vec{BM}$$
$$\vec{V}(M)\cdot\vec{CM}=\vec{V}(C)\cdot\vec{CM}$$

أي نأخذ
M مع A
M مع B
M مع C

مثال (1) لتكن $A, B, C \in S$ (مجموعة مادية) حيث يكون مواضع وسرع هذه النقاط هي:

$A(0,0,1)$ و $B(1,1,0)$ ، $C(1,2,-1)$

$\vec{V}(A)=(0,1,2)$ ، $\vec{V}(B)=(0,0,1)$ و $\vec{V}(C)=(-1,1,1)$

هل المجموعة التي أخذت منها هذه النقط متماسكة أم لا؟ ولماذا؟

الحل:

$$\vec{AB}\cdot\vec{V}(A)=(1,1,-1)\cdot(0,1,2)=-1$$
$$\vec{AB}\cdot\vec{V}(B)=(1,1,-1)\cdot(0,0,1)=-1$$
$$\left.\begin{aligned}\vec{AC}\cdot\vec{V}(A)&=(1,2,-2)\cdot(0,1,2)=-2\\ \vec{AC}\cdot\vec{V}(C)&=(1,2,-2)\cdot(-1,1,1)=-1\end{aligned}\right\}\neq$$

للتمارين نطبق العلاقة $\vec{AB}\cdot\vec{V}(B)=\vec{AB}\cdot\vec{V}(A)$ للسهولة.

بما أن:

$$\vec{AC}\cdot\vec{V}(C)\neq\vec{AC}\cdot\vec{V}(A)$$

فالمجموعة غير متماسكة.

ملاحظة:

إن A و B من مجموعة متماسكة لتحقق العلاقة لكن A, B و C ليست من مجموعة متماسكة لعدم تساوي أحد العلاقات فلا نكمل.

لو كان السؤال أي من النقاط من مجموعة متماسكة نكمل.

مثال (2) من الكتاب لم تذكره الدكتورة)

لتكن A, B و C ثلاث نقاط من جسم صلب يتحرك بحيث تكون مواضع ومتجهات سرع هذه النقاط في لحظة t معلومة هي:

$A(0,0,0)$ و $B(1,1,0)$ و $C(1,1,1)$

$\vec{V}(A) = (2, 1, -3)$ ، $\vec{V}(B) = (0, 3, -1)$

$\vec{V}(C) = (-1, 2, -1)$

عيّن متجهات سرع النقط التالية في اللحظة المذكورة.

$M_1(1, 2, 0)$ ، $M_2(1, 0, 1)$

الحل:

لحساب سرعة M_1 نفرض $\vec{V}(M_1) = (x, y, z)$ فحسب النظرية الأساسية لحركة جسم صلب:

1) نأخذ M_1 مع A من العلاقة:

$$\vec{AM_1} \cdot \vec{V}(A) = \vec{AM_1} \cdot \vec{V}(M_1)$$

$$(1, 2, 0) \cdot (2, 1, -3) = (1, 2, 0) \cdot (x, y, z)$$

$$\boxed{4 = x + 2y} \quad (1)$$

2) نأخذ M_1 مع B من العلاقة:

$$\vec{BM_1} \cdot \vec{V}(B) = \vec{BM_1} \cdot \vec{V}(M_1)$$

$$(0, 1, 0) \cdot (0, 3, -1) = (0, 1, 0) \cdot (x, y, z)$$

$$\boxed{3 = y} \quad (2)$$

3) نأخذ M_1 مع C من العلاقة:

$$\vec{CM_1} \cdot \vec{V}(C) = \vec{CM_1} \cdot \vec{V}(M_1)$$

$$(0, 1, -1) \cdot (-1, 2, -1) = (0, 1, -1) \cdot (x, y, z)$$

$$\boxed{3 = y - z} \quad (3)$$

من المعادلات (1) و (2) و (3) نجد أن:

$$\{x = -2 \;,\; y = 3 \;,\; z = 0\} \Longrightarrow \vec{V}(M_1) = (-2, 3, 0)$$

بالمثل لإيجاد $\vec{V}(M_2)$

مراجعات وتذكرة:

لتكن: $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ نقاط في الفراغ

ومنه:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

ولتكن لدينا:

$$\overrightarrow{AB} = (a_1, b_1, c_1) \quad , \quad \overrightarrow{CD} = (a_2, b_2, c_2)$$

ومنه:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = a_1 \cdot a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$$

بعض الحركات البسيطة للجسم الصلب

الحركة الانسحابية:

نقول عن حركة الجسم الصلب S أنها حركة انسحابية إذا بقي أي متجه (شعاع) من الفراغ المتماسك مع الجسم الصلب مسايراً لنفسه أثناء الحركة.

مثال: حركة المصاعد وحركة السلالم المتحركة هي حركات انسحابية.
(ليس من الضرورة أن يتحرك الشعاع على حامله)

الدراسة الشعاعية لموضع وسرعة وتسارع جسم يتحرك بحركة انسحابية:

$$\forall\, O, M \in S \quad , \quad \overrightarrow{OM} = \vec{C}\,(x, y, z)$$

ثابت في الطول والمنحى (البعد بين نقطتين ثابت في جسم صلب)

لأن النقطتين من جسم صلب — لأن الحركة انسحابية

$\overrightarrow{AB} = \underset{\smile}{\vec{C}}$
شعاع ثابت

$|\overrightarrow{AB}| = \underset{\smile}{C}$
قيمة ثابتة

بالتالي: $\overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_1O} = \vec{C}$

حيث O_1 نقطة ثابتة في الفراغ

ومنه: $\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O} + \vec{C}$ ★

وبالتالي لتعيين موضع النقطة M من الجسم الصلب يكفي معرفة موضع النقطة O بانسحاب قدره الشعاع $\vec{C}$

#

ملاحظة:
$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$
بالتالي:
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$
$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_1O}$

AL SAMRAH

- إن عدد درجات حرية جسم صلب طليق هي 6 درجات كما وجدنا سابقاً.
وفي الحركة الانسحابية نكون قد قيدنا منحى أي متجه بالتالي أضفنا 3 علاقات ناتجة عن القيود
ومنه عدد درجات حرية الجسم الصلب الذي يتحرك بحركة انسحابية هي $(6-3 = 3)$ أي ثلاث درجات حرية.
(إحداثيات النقطة O)
ولأن عدد درجات الحرية تساوي عدد معادلات الحركة يكون لدينا ثلاث معادلات حركة.
من # يمكن اختيار إحداثيات النقطة O من الجسم كإحداثيات معممة ولتكن $O(x_0, y_0, z_0)$ فمعادلات الحركة هي:

$$x_0 = x_0(t) \quad , \quad y_0 = y_0(t) \quad , \quad z_0 = z_0(t)$$

إذاً الحركة الانسحابية تعد من أبسط الحركات لأنها تعاد إلى دراسة حركة نقطة مادية وحيدة في الفراغ الثابت.

(اشتقاق السرعة والتسارع ينجم عن اشتقاق شعاع الموضع (شعاع الحركة) بالجملة الثابتة حصراً)
(الاشتقاق في جملة ثابتة ولا يسمح في جملة متحركة (متماسكة))

توزع السرع:

لإيجاد سرعة النقطة M نقوم بالاشتقاق بالنسبة للزمن لشعاع الموضع للجملة الثابتة:
بالتالي:

$$\forall\ O, M \in S \quad , \quad \vec{V}(M) = \frac{d(\overrightarrow{O_1 M})}{dt} = \frac{d(\overrightarrow{O_1 O} + \vec{C})}{dt}$$

من * سابقاً

$$\Rightarrow \vec{V}(M) = \frac{d(\overrightarrow{O_1 O})}{dt} + \frac{d\vec{C}}{dt} \Rightarrow \vec{V}(M) = \vec{V}(O) + \vec{O}$$

مشتق الثابت الشعاع الصفري

ومنه نجد:

$$\vec{V}(M)-\vec{V}(O)=\vec{0} \Rightarrow \vec{V}(M)=\vec{V}(O)$$

$$(x',y',z')=(x'_0,y'_0,z'_0)$$

أي أنه سرع جميع نقاط الجسم الصلب متساوية في كل لحظة.

نتيجة:

الخاصية الأخيرة (تساوي السرع) هي خاصية مميزة لأنه لو تحركت أي مجموعة مادية وكانت سرع جميع نقاطها متساوية في كل لحظة كانت المجموعة متماسكة وحركتها انسحابية.

س: إذا أخذنا نقطتين من مجموعة مادية ما وتساوت السرع فهل الحركة انسحابية؟

ج: هو إثبات النتيجة الأخيرة ويكون بالشكل:

$\forall M, O \in S$ و S مجموعة مادية ما

من الفرض:

$\vec{V}(M)=\vec{V}(O)$ في كل لحظة.

أي:

$$\frac{d(\vec{O_1M})}{dt}=\frac{d(\vec{O_1O})}{dt}$$

بالمكاملة:

$$\vec{O_1M}=\vec{O_1O}+\vec{C}$$

أي:

$$\vec{O_1M}-\vec{O_1O}=\vec{C} \Rightarrow \vec{OM}=\vec{C}$$

بالتالي فإن منحى الشعاع $\vec{OM}$ ثابت فالحركة انسحابية وثبات طويلة المتجه $\vec{OM}$ يكون انجسم الطلب.

$$|\vec{OM}|=C$$

ثابت طويلة معناها جسم صلب
ثابت منحى معناها حركة انسحابية

توزع التسارعات:

وجدنا من السابق أنه:

$$\forall M \in S \quad : \vec{V}(M) = \vec{V}(O)$$

بالتالي باشتقاق هذه العلاقة نجد:

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(O)$$

أي أنه تسارعات جميع نقاط الجسم الصلب المتحرك بحركة انسحابية متساوية فيما بينها في كل لحظة.

ملاحظة:

إن تساوي التسارعات في مجموعة مادية ليس كافي (ليس من الضرورة) أن يكون الجسم صلب والحركة انسحابية

لأنه:

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(O) \Longrightarrow \vec{V}(M) = \vec{V}(O) + \vec{C_1}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{O_1M} = \vec{O_1O} + \vec{C_1}t + \vec{C_2}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{O_1M} - \vec{O_1O} = \vec{C_1}t + \vec{C_2}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\vec{OM} = \vec{C_1}t + \vec{C_2}}$$

- فهذا يدل على أن المجموعة غير متماسكة (أي الجسم غير صلب) والحركة ليست انسحابية
- إن انعدام الثابت $\vec{C_1}$ من العلاقة الأخيرة يعني أن الجسم صلب (أي المجموعة متماسكة)

وبدوره ينتج أن: $\vec{V}(M) = \vec{V}(O)$

التي تدل على أن الحركة انسحابية.

- إذا كانت المجموعة متماسكة ومتجهات تسارعها متساوية كانت الحركة انسحابية.

الحركة المماسة لحركة انسحابية:

إذا تساوت سرع جميع نقاط جسم صلب في لحظة واحدة فقط فإننا نقول أن حركة الجسم مماسة في هذه اللحظة لحركة انسحابية. وتكون تسارعات نقط المجموعة غير متساوية في تلك اللحظة في الحالة العامة.

الدراسة التحليلية للحركة الانسحابية للجسم الصلب:

تعيين الموضع:

من أجل تعيين الموضع تحليلياً نبدأ باختيار جملة إحداثية مناسبة.

لنأخذ:

$O_1 x_1 y_1 z_1$ جملة محاور إحداثية مباشرة وثابتة

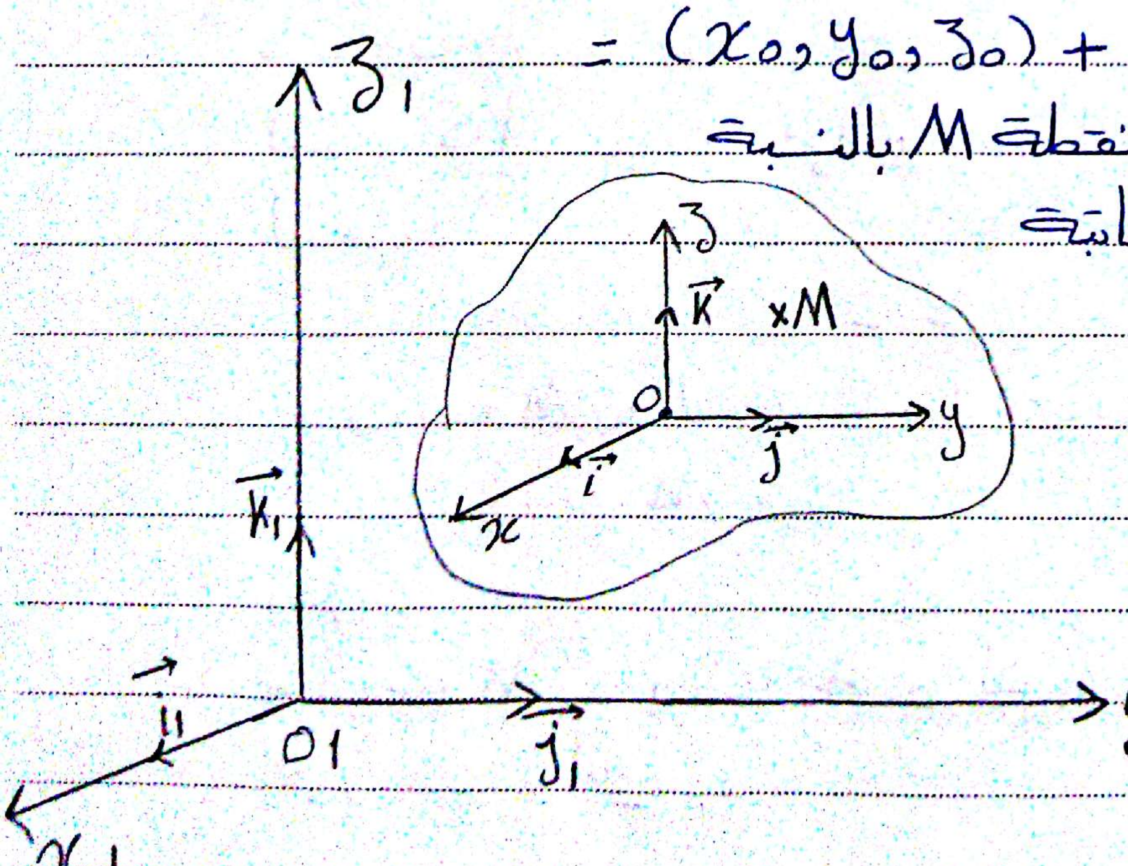
و $Oxyz$ جملة محاور إحداثية مباشرة متماسكة مع الجسم S

بحيث محاور الجملة المتماسكة موازية لمحاور الجملة الثابتة.

(وهذا ممكن لأن المتجهات تحافظ على منحاها في الحركة الانسحابية)

إن موضع أي نقطة $M \in S$ يتعين بالعلاقة:

$$\forall M \in S : \overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM}$$
$$= \overrightarrow{O_1O} + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$
$$= (x_0, y_0, z_0) + (\alpha, \beta, \gamma)$$



لتكن (x, y, z) إحداثيات النقطة M بالنسبة للجملة المتماسكة فهي مقادير ثابتة بالإسقاط على الجملة الثابتة:

$$\vec{i} = \vec{i_1} \quad , \quad \vec{j} = \vec{j_1} \quad , \quad \vec{k} = \vec{k_1}$$
$$\vec{i} \parallel \vec{i_1} \quad , \quad \vec{j} \parallel \vec{j_1} \quad , \quad \vec{k} \parallel \vec{k_1}$$

$$x_1 = x_0 + \alpha$$
$$y_1 = y_0 + \beta$$
$$z_1 = z_0 + \gamma$$

حيث (x_0, y_0, z_0) هي إحداثيات النقطة O من الجسم أي هي الوسطاء المستقلة لتعيين موضع أي نقطة من الجسم الصلب المتحرك بحركة انسحابية حيث:

$$x_0 = x_0(t) \quad , y_0 = y_0(t) \quad , z_0 = z_0(t)$$

وهي معادلات الحركة.

تعيين السرعة:

لتعيين مركبات متجه سرعة النقطة M يكفي اشتقاق متجه الموضع $\overrightarrow{O_1M}$ بالنسبة للزمن فنجد:

$$\vec{V}(M) = (x_1' = x_0' \quad , y_1' = y_0' \quad , z_1' , z_0')$$

وهنا أيضاً نجد:

$$\vec{V}(M) = \vec{V}(O)$$

تعيين التسارع:

نشتق مباشرةً مركبات متجه السرعة للنقطة M نجد:

$$\vec{\Gamma}(M) = (x_1'' = x_0'' , y_1'' = y_0'' , z_1'' = z_0'')$$

مسألة:

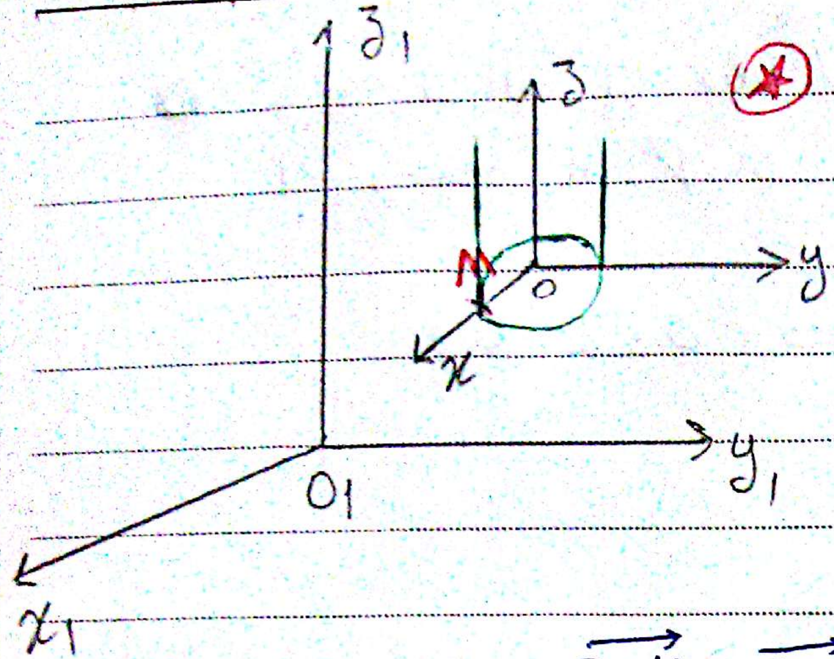
لتكن S اسطوانة تتحرك بحركة انسحابية بحيث أن معادلات الحركة لها هي:

$$x_0 = t \quad , y_0 = t^2 \quad , z_0 = 2$$

بفرض أن M نقطة تتحرك على محيط S عين موضع وسرعة وتسارع M.

الحل:

بما أن M نقطة على المحيط لنفرض أنها في قاعدة الاسطوانة على المحور xO بالتالي نجد:



R نصف القطر و $M(R,0,0)$ ⊛

ومنه:

$\forall M, O \in S$:

$\vec{O_1M} = \vec{O_1O} + \vec{OM}$

$= \vec{O_1O} + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

وبما أن (x,y,z) هي إحداثيات M

نعوض ⊛ فنجد:

$\vec{O_1M} = \vec{O_1O} + R\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$

$\Rightarrow \vec{O_1M} = \vec{O_1O} + R\vec{i}$

بالإسقاط على الجملة الثابتة:

$x_1 = x_0 + R$

$y_1 = y_0$ $\qquad z_1 = z_0$

بتعويض معادلات الحركة بالإسقاط نجد:

$\underbrace{x_1 = t + R \quad , \quad y_1 = t^2 \quad , \quad z_1 = 2}_{\#}$ } إحداثيات النقطة M

لإيجاد مسار M نحذف الزمن من المعادلات # فنجد:

$x_1 = t + R \Rightarrow t = x_1 - R$

نعوض ببقية المعادلات:

$y_1 = (x_1 - R)^2$ و $z_1 = 2$

المسار يتمثل من القطع المكافئ.

ملاحظة:

إذا لم نستطع حذف الزمن نقول عن المعادلات أنها وسيطية.

● لإيجاد السرعة $\vec{V}(M)$ نقوم بالاشتقاق المباشر لإحداثيات M بالنسبة للزمن فنجد:

$\vec{V}(M) = \vec{V}(O) = (x_1', y_1', z_1') = (1, 2t, 0)$

لأن الحركة انسحابية

ولإيجاد التسارع $\vec{\Gamma}(M)$ نقوم بالاشتقاق المباشر لإحداثيات شعاع السرعة $\vec{V}(M)$ بالنسبة للزمن فنجد :

$$\underbrace{\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(0)}_{\text{لأن الجسم صلب والحركة انسحابية}} = (x_1'', y_1'', z_1'') = (0, 2, 0)$$

إضافية مسألة ② (أعطتها الدكتورة السنة السابقة)

لدينا جسم صلب يتحرك بحركة انسحابية معادلات حركته هي :

بما أنها حركة انسحابية فالمعادلات هي إحداثيات النقطة O

$$x_0 = \sin t \quad , \quad y_0 = 2\cos t \quad , \quad z_0 = 1$$

ولتكن النقطة M حيث $\vec{OM} = (2, 0, -1)$

عين مسار النقطة O ومسار M وسرعة وتسارع M

الحل :

$$x_0 = \sin t \quad ①$$
$$y_0 = 2\cos t \quad ② \Rightarrow \frac{y_0}{2} = \cos t$$
$$z_0 = 1 \quad ③$$

$$①^2 + ②^2 = 1$$

$$* \left[x_0^2 + \frac{y_0^2}{4} = 1 \right.$$
$$③ \quad z_0 = 1$$

المسار يتعين من تقاطع * مع ③

$$\forall M \in S \quad , \quad \vec{O_1M} = \vec{O_1O} + \vec{OM}$$

$$x_1 = \sin t + 2 \Rightarrow x_1 - 2 = \sin t \quad ①$$
$$y_1 = 2\cos t + 0 \Rightarrow \frac{y_1}{2} = \cos t \quad ②$$
$$z_1 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow z_1 = 0 \quad ③$$

أشعة الموضع للنقطة M

$$* \ (x_1 - 2)^2 + \frac{y_1^2}{4} = 1 \ *$$

قطع ناقص في المستوي xy

المسار يتعين من تقاطع * مع ③

$$\vec{V}(M) = \vec{V}(0) = (\cos t, -2\sin t, 0)$$
$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(0) = (-\sin t, -2\cos t, 0)$$

انتهت المحاضرة

بيان البشاشي