المحاضرة الثالثة — التاريخ: 10/10/2016

في هذه المحاضرة سنتحدث عن حل مسائل التدفق الأعظمي.

## * التدفق الأعظمي:

لتكن لدينا مسألة النقل التالية:

| المستهلكين / المصدرين | $B_1$ | | $B_n$ | العياجي |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $C_{11}$ | كلفة النقل | $C_{1n}$ | $a_1$ |
| | | | | |
| | | | | |
| $A_m$ | $C_{n1}$ | | $C_{mn}$ | $a_m$ |
| المطلوب | $b_1$ | | $b_n$ | |

الموضوع

هدفنا الآن هو نقل مسألة النقل إلى مسألة نحلها بطريقة خوارزمية التدفق الأعظمي

Transpose problem → Maximal Flow (تدفق أعظمي)

## * التدفق الأعظمي Maximal Flow:

يعني وضع خطة تسمح بنقل أكبر كمية ممكنة من عقدة البداية في الشبكة إلى عقدة النهاية. أي:

تحويل مسألة النقل إلى مسألة تدفق أعظمي فإننا نقوم بإضافة مركز توزيع وهمي للشبكة بحيث تكون عقدة البداية الكمية التي يستطيع هذا المركز توزيعها وهي مجموع كميات المراكز التوزيع الحقيقية نضيف أيضاً للشبكة مركز استهلاك وهمي طاقته الاستيعابية (طلبية) هي مجموع طلبيات مراكز الاستهلاك الحقيقية

## * شبكة النقل:

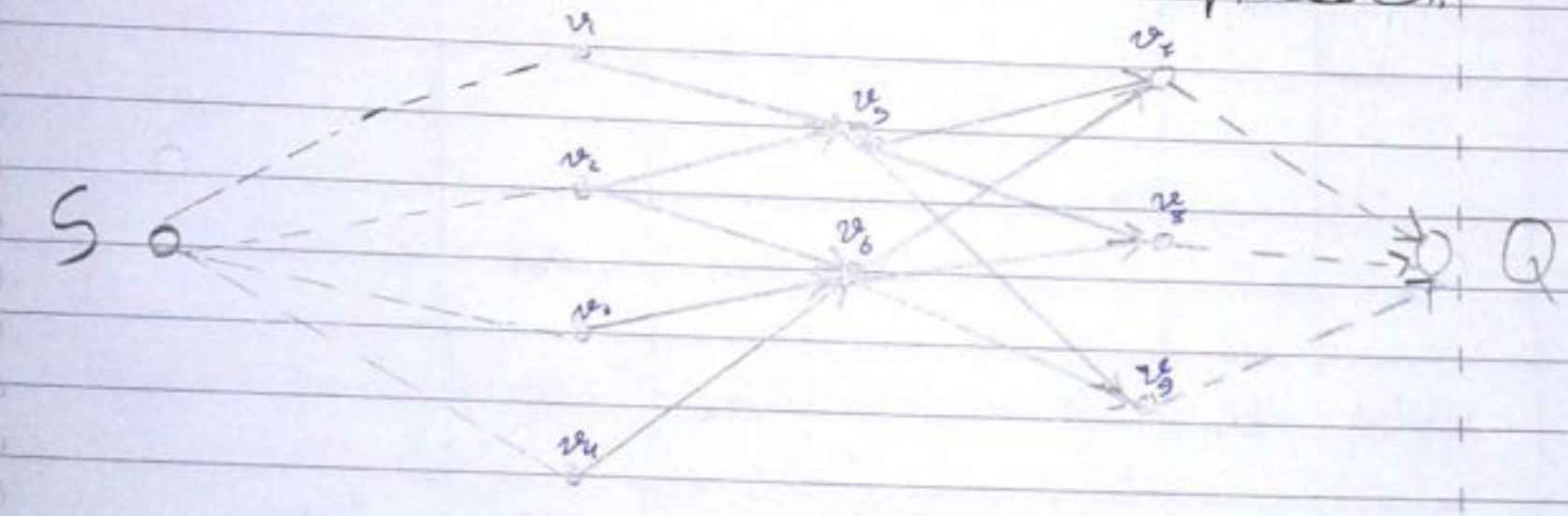
هي شبكة موجه فيها عقدة بداية وعقدة نهاية وتحوي أيضاً هذه الشبكة عقدتين

تُمثل مراكز التصدير ومراكز الاستهلاك في شبكة النقل الأصلية.

تذكرة:

+ تتكون الشبكة عادة "مكونة من عقد وأقواس وعقدة مصدر وعقدة هدف
+ العقد البينية هي ليست عقد هدف أو عقد مصدر.
+ عقدة المصدر هي عقدة لا يدخل فيها أي قوس.
+ عقدة الهدف هي عقدة لا يخرج منها أي قوس.

* الهدف من خوارزمية التدفق الأعظمي إيجاد المسارات الممكنة من عقدة المصدر إلى عقدة الهدف:




نرى من خلال الشبكة السابقة أننا قمنا بوضع عقدة بداية وهمية حيث بضاعتها تساوي مجموع بضائع عقد المصدر (مركز التصدير) وتم وضع عقدة نهاية وهمية Q حيث حاجتها تساوي مجموع حاجيات عقد الهدف (مراكز الاستهلاك).

* من أهم خوارزميات التدفق الأعظمي خوارزمية: Ford & Fulkerson

خطوات الخوارزمية:

إن البيان الموافق للمسألة بشكل عام هو:

| | * | $b_0$ | $b_1$ | | $b_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| * | $b_0$ | - | $a_{01}$ | | $a_{0n}$ |
| $(0, a_{10})$ | $b_1$ | $a_{10}$ | - | | $a_{1n}$ |
| | ⋮ | ⋮ | | | |
| | $b_n$ | $a_{n0}$ | $a_{n1}$ | | - |

حيث أن القيمة $a_{ij}$ هي قيمة التدفق من المركز $i$ إلى المركز $j$ وقيمتها هي إما صفر أو أكبر من صفر: $a_{ij} > 0$ حيث $i \neq j$.

ويكون المطلوب في المسألة هو إيجاد حساب التدفق الأعظمي من المركز $b_0$ إلى $b_n$

$b_0 \rightarrow b_n$ ،

حيث أن $b_0$ مركز التصدير (مجموع قيم مراكز التصدير الأصلية).

$b_n$ مركز الاستهلاك (مجموع قيم مراكز الاستهلاك الأصلية).

* الخطوة الأولى:

نؤشر العمود والسطر الموافقين لـ $b_0$ بـ (*).

* الخطوة الثانية:

نبحث في سطر $b_0$ عن الخلايا التي يكون فيها $a_{0j} \neq 0$ (أول قيمة غير معدومة في السطر)

حيث أن $j = 1 \ldots n$ ، ونؤشر العامود الموافق لهذه القيمة بالثنائية

$(0, h_i)$ حيث أن: $h_i = a_{0i}$ ونضع هذه الثنائية أيضاً في السطر الموافق

(يكون الهدف من هذه الخطوة هو تزويد كل سطر وعامود بثنائية)

* $(0, h_i)$: المركبة الأولى (0) تدل على دليل المركز.

المركبة الثانية تدل على الكمية المنقولة من مركز إلى مركز آخر.

* الخطوة الثالثة:

بالتالي

ندرس الأسطر التي أشرنا إليها سابقاً بالثنائية $(a, h_i)$ ويكن السطر الموافق هو السطر الثاني، نبحث عن قيمة غير معدومة في هذا السطر والموافقة للعامود $b_2$ ونؤشر هذا العامود بالثنائية $(2, h_k)$ حيث أن: $a_{2k} \neq 0$

علماً أن $h_k = \min\{h_2, a_{2k}\}$، ثم نؤشر السطر الموافق لـ $k$.

* الخطوة الرابعة:

نكرر الخطوة السابقة حتى نؤشر جميع الأسطر والأعمدة وأي نكون قد وصلنا إلى عقدة النهاية (الهدف) وبالتالي نستطيع حساب التدفق الأعظمي من $b_0$ إلى $b_n$ وفق مايلي:

* الخطوة الخامسة:

نوجد الطاقة التمريرية في هذه المرحلة (في المسار من $b_0$ إلى $b_n$) وهي $Q_1$ وهي

$$Q_1 = \min\{h_s, a_{sn}\}$$

حيث $(s, h_n)$ هي الثنائية الموافقة لـ $b_n$.

* الخطوة السادسة:

★ نضع إشارة (-) أمام كميات التدفق على المسار $b_0 \rightarrow b_n$

★ نضع إشارة (+) على كميات التدفق المناظرة لها.

* الخطوة السابعة:

- حيث نجد إشارة (+) نضيف الكمية $Q_1$
- وحيث نجد إشارة (-) نطرح الكمية $Q_1$

* الخطوة الثامنة:

نكرر الخطوات السابقة حيث تصبح جميع قيم العامود الأخير معدومة عندئذٍ تتوقف الخوارزمية، وبالتالي يكون التدفق الأعظمي هو:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots Q_n$$

## تحديد جدول التدفق:

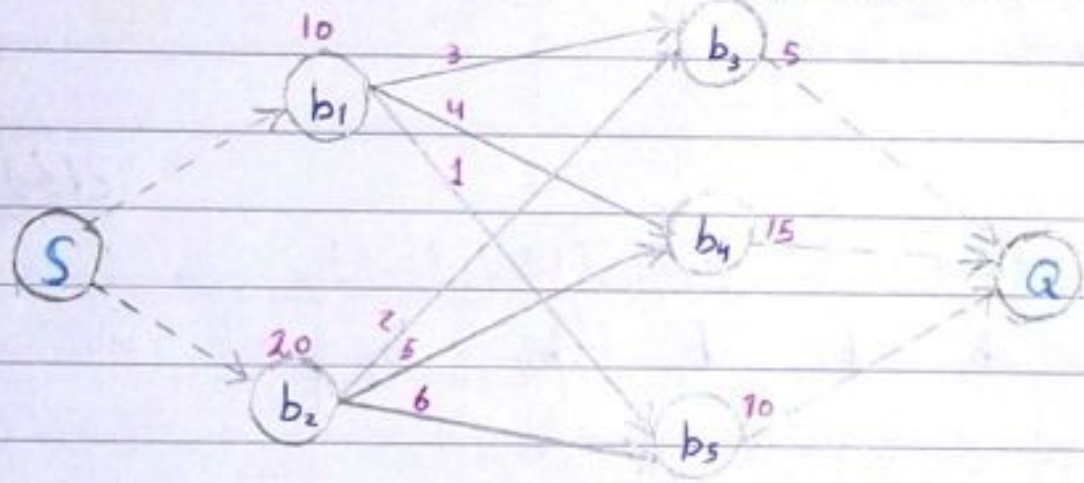
لتحديد جدول التدفق نقوم بطرح آخر جدول توصلنا إليه من الجدول الأصلي، فنحصل على قيمة التدفق من خلية إلى أخرى.

هذا الجدول يتضمن مايلي:

1) الكميات الموجبة تمثل الكميات المنقولة (التدفق الحاصل) من عقدة إلى عقدة أخرى.
2) الكميات السالبة تمثل الكميات التي لم نستطع نقلها من مركز إلى مركز آخر.
3) القيمة صفر (0) تمثل أنه لايوجد كميات منقولة بين المركز ومركز آخر.

مثال:

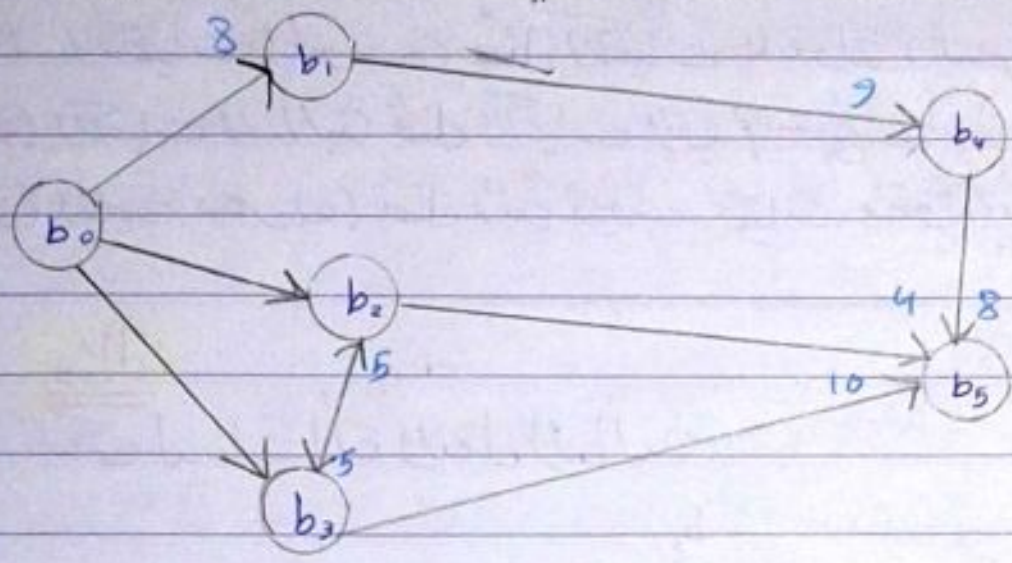
لتكن لدينا مسألة النقل التالية:




| مستهلكين / مصدرين | $b_3$ | $b_4$ | $b_5$ | الموجود |
|---|---|---|---|---|
| $b_1$ | 3 | 4 | 1 | 10 |
| $b_2$ | 2 | 5 | 6 | 20 |
| المطلوب | 5 | 15 | 10 | 30 / 30 |

وإن هذا المثال قام الدكتور بإعطائنا وظيفة ولكن هذا المثال لايمكن حله وفق طريقة الشفق الأعظمي، ولإيجاد الحل الأمثل نحله بكلتا الطريقة والثانية.

**مثال** طبّق خوارزمية التدفق الأعظمي على مسألة النقل التالية:




**الحل:**

| | | $b_0$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | $b_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| * | | | | (-) | | | |
| * | $b_0$ | | 8 | 10 | 5 | | |
| (0,8) | $b_1$ | | | | | 9 | |
| (0,10) | $b_2$ | (+) | | | 5 | | (-) 4 |
| (0,5) | $b_3$ | | | 5 | | | 10 |
| (1,8) | $b_4$ | | | | | | 8 |
| (2,4) | $b_5$ | | | (+) 4 | | | |

قمنا بتحديد السطر والعامود بثنائية حسب العناصر غير صفرية في السطر والعامود الثنائية $(a, b_i)$ القيمة في مصفوفة التدفق ثم ذيلك السطر بالسنة الثنائية في $b_4$ هي $(1,8)$ بما أن أول قيمة غير صفرية في عامود $b_4$ هي 9 وهي في سطر $b_1$ لذلك نضع في الثنائية المقابلة لـ $b_4$ الدرجة الأولى 1 في السطر نجد ثنائية $(0,8)$ نأخذ min من 8 و 9 ونضعه الدرجة الثانية في سطر وعامود $b_4$ ☺

المسار هو:

$b_0 \xrightarrow{10} b_2 \xrightarrow{5} b_4$

$Q = \min\{10, 5\} = 5$

العلامة المرتدة هي:

زوج الثنائيات: $(b_0, b_2), (b_2, b_4)$ بإشارة $(-)$

والثنائيات المتأخرة: $(b_4, b_2), (b_2, b_0)$ بإشارة $(+)$

(0,8) (0,6) (0,5) (1,8) (3,5)

| | | $b_0$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | $b_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| * | $b_0$ | | 8 | 6 | 5 (=) | | |
| (0,8) | $b_1$ | | | | | 9 | |
| [0,6) | $b_2$ | 4 | | | 5 | | 0 |
| (0,5) | $b_3$ | (+) | | 5 | | | 10 (-) |
| [1,8] | $b_4$ | | | | | | 8 |
| (3,5) | $b_5$ | | | 8 | (+) | | |

حيث جد إشارة (-) نظر رقمية $Q_1$ وحيث جد إشارة (+) نخوذ $Q_1$

المسار هو:

$b_0 \xrightarrow{5} b_3 \xrightarrow{10} b_5$

عرفنا هذا من الثانية الأخيرة، ننظر الى رقم الدليل هو 5 فننتقل الى $b_3$ ونجد ان المربعة فارغة في الثانيتين لذلك ونقف الى النهاية هنا.

$Q_2 = \min\{5, 10\} = 5$

الثنائيات: (-) $(b_3, b_5)$ ، $(b_0, b_3)$

نظيراتها: (+) $(b_5, b_3)$ ، $(b_3, b_0)$

* (0,3) (0,6) (2,5) (1,8) (3,5)

| | | $b_0$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | $b_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| * | $b_0$ | | 8 | 6 (-) | 0 | | |
| (0,8) | $b_1$ | | | | | 9 | |
| (0,6) | $b_2$ | 4 (+) | | | 5 (-) | | |
| (2,5) | $b_3$ | 5 | | 5 (+) | | | 5 (-) |
| (1,8) | $b_4$ | | | | | | 8 |
| (3,5) | $b_5$ | | | 8 | 5 (+) | | |

المسار هو:

$b_0 \xrightarrow{6} b_2 \xrightarrow{5} b_3 \xrightarrow{5} b_5$

$Q_3 = \min\{6, 5\} = 5$

والثنائيات:

$(b_0, b_2)$ ، $(b_2, b_3)$ ، $(b_3, b_5)$

نخوذها بإشارة (-)

ونظيراتها:

$(b_2, b_0)$ ، $(b_3, b_2)$ ، $(b_5, b_3)$

نخوذها بإشارة (+)

| | | $b_0$ | $b_1$ (0,8) | $b_2$ (0,1) | $b_3$ (5,8) | $b_4$ (1,8) | $b_5$ (4,8) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $b_0$ | | (-) 8 | 1 | | | |
| (0,8) | $b_1$ | | | | | (-) 9 | |
| (0,1) | $b_2$ | (+) | | | 0 | | |
| (5,8) | $b_3$ | 5 | | 10 | | | 0 |
| (1,8) | $b_4$ | | (+) | | | | (-) 8 |
| (4,8) | $b_5$ | | | 8 | 10 | (+) | |

المسار هو:

$b_0 \xrightarrow{8} b_1 \xrightarrow{9} b_4 \xrightarrow{8} b_5$

$Q = \min\{8, 9\} = 8$

* الثنائيات:

$(b_0, b_1), (b_1, b_4), (b_4, b_5)$

نعود بإشارة (-)

* وظيفتها:

$(b_1, b_0), (b_4, b_1), (b_5, b_4)$

نعود بإشارة (+)

| | $b_0$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | $b_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $b_0$ | | 0 | 1 | | | |
| $b_1$ | 8 | | | | 1 | |
| $b_2$ | 9 | | | | | |
| $b_3$ | 5 | | 10 | | | |
| $b_4$ | | 8 | | | | 0 |
| $b_5$ | | | 8 | 10 | 8 | |

نلاحظ أن العمود الأخير أصبح كله أصفار لذلك نتوقف عن عملية التكرار ونقوم بطرح الجدول النهائي من الجدول الأصلي

التدفق الأعظمي هو: $Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 4 + 5 + 5 + 8 = 22$

الجدول الأصلي — الجدول الأخير هو:

| | $b_0$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | $b_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $b_0$ | | 8 | 9 | 5 | | |
| $b_1$ | -8 | | | | 8 | |
| $b_2$ | -9 | | | 5 | | 4 |
| $b_3$ | -5 | | -5 | 5 | | 10 |
| $b_4$ | | -8 | | | 8 | |
| $b_5$ | | | -4 | -10 | -8 | |

- مجموع عناصر العامود الأخير هو التدفق الأعظمي $4 + 10 + 8 = 22$

- القيم السالبة في العمود الأول تمثل النقص الحاصل في عقدة المصدر $b_0$ وتبين حاجة كل عقدة من العقد البقية.

انتهت المحاضرة الثالثة ☺

N.Z