Syria Math

التحليل العددي 1

الدكتورة: رشا بعاج

المحاضرة : الرابعة

التاريخ : ١٩/١٠/٢٠١٦

إعداد : محمد فليون && عبد الرحمن البحش

مرحبا اصدقائي:

سنأخذ في محاضرتنا هذه كيفيّة إيجاد حل لمعادلة غير خطيّة وذلك عبر الطّرق المجالية منها طريقة تنصيف المجال، كما سنأخذ خوارزمية تنصيف المجال، وأيضاً معايير التّوقف في الخوارزميّة .

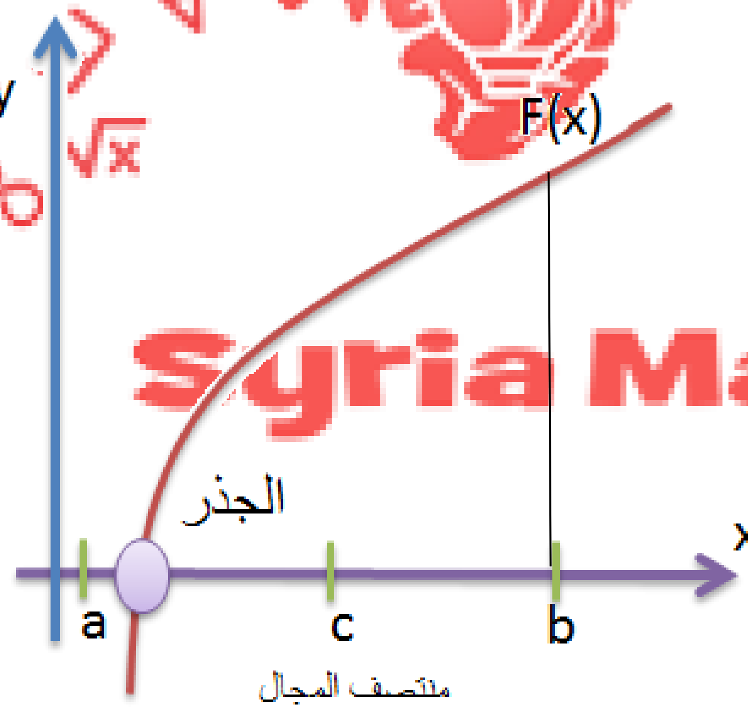
حل المعادلة غير الخطية :

إذا كان لدينا الدالة $f(x)$ فإن حل المعادلة $f(x)=0$ تعبر عن إيجاد الجذور أو الحلول أو التقاطع مع المحور ox

الطّرق المجاليّة

علماً أنّ الطّرق هنا تعطينا إجابات تقريبيّة وتعتمد على مبرهنة القيمة الوسطى حيث نفترض أن الدالة f معرفة على المجال [a,b] وتأخذ قيمها في R كما أن هذه الدالة مستمرة على المجال [a,b] وأن $f(a).f(b)<0$

عندها فإن الدالة $f(x)$ تغير إشارتها ضمن المجال وعليه فإن المجال [a,b] يحوي جذراً للمعادلة على الاقل .



قاعدة عامة:

إذا كانت الدالة f مستمرة على المجال [a,b] عندها نميز حالتين :

١) $f(a).f(b)>0$

هذا يعني أن الدالة لها إحدى حالتين إما أن تكون الدالة ليس لها جذور على هذا المجال أو يوجد عدد زوجي من الجذور بهذا المجال.

٢) $f(a).f(b) < 0$

عندها يوجد عدد فردي من الجذور للدالة على هذا المجال.

معايير التوقّف في خوارزمية إيجاد الجذور:

١) معيار تقارب متتالية القيم $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon(x)$
٢) معيار تقارب الدالة المطلوب إيجاد جذرها $|f(x_n)| < \varepsilon(f)$
٣) معيار تقارب خطأ الطّريقة $E_{max} < \varepsilon$
٤) عدد التكرارات المطلوبة n

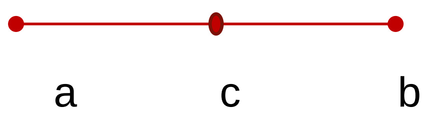
ملاحظة: من نص السؤال نستطيع معرفة المعيار الذي سنقوم بتطبيقه.

أولاً: طريقة تنصف المجال: بفرض أن الدالة $f(x)$ معرفة على المجال $[a,b]$ ومستمرة عليه لإيجاد جذر الدالة في هذا المجال نقوم بعملية التنصيف.

خوارزميّة تنصيف المجال:

لدينا الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة على المجال $[a,b]$ لإيجاد جذر هذه الدالة المعرفة والمستمرة على هذا المجال يجب أن نتحقق من الشرط : $f(a).f(b) < 0$ إذا تحقق نقول إذاً يوجد بهذا المجال جذر لهذه الدالة بعدها نحدد قيمة الخطأ (ε) ثم نقوم بعملية التنصيف أي إيجاد منتصف هذا المجال وهو النقطة c فرضاً $\Longleftarrow$

$c = \frac{a+b}{2}$ وعندها نقوم بحساب $f(c)$ إذا كانت $f(c) = 0$ إذاً c هي النقطة المطلوبة وهي جذراً للدالة $f(x)$ حيث نقوم بتحديد المتغيرات



$b_1 = b, a_1 = a$ تحدد حسب التمرين= ε

أما إذا كانت $|f(c)| < \varepsilon$ عندئذٍ c جذر تقريبي للدالة وتتوقف الخوارزمية وهو المطلوب

أمّا إذا كان $f(a).f(b) > 0$ فيجب علينا تنصيف مجالنا مرّة اخرى

<<كيف نقوم بتنصيف المجال مرّة اخرى>>

إما نقوم بتحديد المتغيرات على هذا الشكل $b_1 = c$ $a_1 = a$ عندها أصبح $f(a).f(c) < 0$ إذاً نقول بهذا المجال يوجد جذر لهذه الدالة

أو نقوم بتحديد المتغيرات على هذا الشكل $b_1 = b$ $a_1 = c$

عندها أصبح $f(c).f(b) < 0$ ونقول إذاً بهذا المجال يوجد جذر لهذه الدالة.

مثال: $f(x) = x^2 - 3$ في المجال $[1,2]$ بطريقة تنصيف المجال بدقة

$\varepsilon(f) = 0.01$

n	a	B	$f(a)$	$f(b)$	$c = \frac{a+b}{2}$	$f(c)$	التعديل	نصف المجال قبل التعديل $\frac{b-a}{2}$
1	1	2	-2	1	1.5	-0.75	$a = c$	0.5
2	1.5	2	-0.75	1	1.75	0.062	$b = c$	0.25
3	1.5	1.75	-0.75	0.0625	1.375	-0.359	$a = c$	0.125
4	1.625	1.75	-0.3594	0.0625	1.6875	-0.1523	$a = c$	0.0313
5	1.6875	1.75	-0.1523	0.0625	1.7188	0.0457	$a = c$	0.0156
6	1.7188	1.7344	-0.0457	0.0625	1.7344	0.0081	$b = c$	0.0078
7	1.71988	1.7344	-0.0457	0.0081	1.7266	-0.0189	$a = c$	0.0078

نلاحظ أنّ $c = 1.7344$ هو الجذر التربيعي المطلوب حيث أن

$|f(1.7344)| < \varepsilon$ وهو شرط التوقف.

لوكان السؤال أوجد خمسة تكرارات للجذر التقريبي فنقول عن $c = 1.7188$ هي الجذر المطلوب.

ملاحظة:

بعد الانتهاء من إيجاد الحل فنذكر وبعبارة واضحة ماهي القيمة التي تمثل قيمة الجذر التقريبي المطلوب

- **طريقة ثانية لحل التمرين: ((تتطابق الطريقة السابقة لكن دون استخدام الجدول))**

$$\begin{cases} f(a) = -2 \\ f(b) = 1 \end{cases}$$

$$f(a).f(b) < 0$$

إذاً يوجد جذر ضمن المجال $c = \frac{a+b}{2} = 1.5$

$$f(c) = 0.75 > \varepsilon = 0.01$$

$$f(a).f(b) < 0$$

إذاً المجال الجديد [1.5,2] ونكرر العملية.

- **الحدّ الأعلى للخطأ بطريقة تنصيف المجال**

$$|\alpha - c_n| \le \frac{b-a}{2^n}$$

حيث α هو الجذر الفعلي، c_n الجذر التقريبي، n عدد التكرارات التي طبّقناه بالطّريقة

- **القانون الذي نستطيع من خلاله معرفة عدد التكرارات الأعظمي اللازم للحصول على دقة ε هو**

$$n \ge \frac{\ln(\frac{b-a}{\varepsilon})}{\ln 2} \quad \text{أو} \quad n \ge \frac{\log(\frac{b-a}{\varepsilon})}{\log 2}$$

وظيفة: أوجد جذر المعادلة $(x-1)(x-2)(x-4)+1=0$

في المجال [0,4] وبدقة $\varepsilon(f) = 0.01$

سيتم حلها بالمحاضرة القادمة إن شاء الله ^_^ ......

"انتهت المحاضرة"

"لا تنسونا من صالح دعائكم"