التحليل 3

الدكتور : يحيى قطيش

المحاضرة : الأولى

التاريخ : ٢٠١٦/١٠/٤

إعداد : نذير تيناوي

من المعروف أن مقرر التحليل ٣ ما هو إلا امتداد لمقرري التحليل ١-٢ لذلك من الأفضل أن نسرد مفردات المقرر ثم نراجع بعض أفكار التحليل ١

المحتوى العلمي:

1)المتتاليات غير المنتهية (بعض الخواص الأساسية للأعداد الحقيقية - القيمة المطلقة- المجالات- المتتاليات العددية المحدودة وغير المحدودة- المتتاليات المتقاربة- اللامتناهيات في الكبر و اللامتناهيات في الصغر)

2) المتسلسلات غير المنتهية و الجداءات غير المنتهية(مفاهيم أساسية)- بعض الخواص الأساسية للمتسلسلات المتقاربة - المتسلسلات ذات الحدود الموجبة - المتسلسلات المتناوبة

3) المتتاليات الدالية (تعاريف- التقارب المنتظم لمتتالية التوابع - بعض خواص متتاليات التوابع المتقاربة (التوابع الخاصة وتطبيقاتها - نشر تايلور و ماكلوران - تكاملات معتلة)

و الآن لنراجع بعض المفاهيم التي مرت في مقرر التحليل ١:

المتتالية: هي مجموعة من الأعداد المرقمة بواسطة الأعداد الطبيعية أي:

$$a_1 , a_2 , \ldots , a_n$$

حيث a_n هو الحد العام للمتتالية

و نرمز لها اختصاراً بالشكل: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ أو $\{a_n\} : n \geq 1$

وحيث أن ترتيب عناصر المتتالية مهم فلا يجوز تبديل ترتيب عناصرها لأنه عند تبديل ترتيب أي عنصرين نحصل على متتالية جديدة.

تعريف المتتالية رياضياً : هي تابع f منطلقه مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$(أو أي مجموعة جزئية غير منتهية من $\mathbb{N}$) ومستقره مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ أي:

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$: f(n) = a_n : n \in \mathbb{N}$$

تعريف المتسلسلة:

لتكن لدينا المتتالية: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} : a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

حيث: $a_n \in \mathbb{R}$ نعرف المتسلسلة بأنها المجموع الجبري لعناصر متتالية ونعبر عنها بالشكل التالي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

يدعى a_1 الحد الأول للمتسلسلة ويدعى a_n الحد العام أو الحد النوني للمتسلسلة

كما أن المتسلسلة ذات حدود غير سالبة وغير منتهية ونرمز لها بـ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

متتالية المجاميع الجزئية:

فنعرف متتالية المجاميع الجزئية لمتسلسلة عددية لا نهائية بالشكل التالي:

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

.

.

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

نسمي $\{s_n\}$ متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة المعطاة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

نقول عن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ أنها **متقاربة** إذا وفقط إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية لها متقاربة

$$\exists s \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} s_n = s$$

ونقول عن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ أنها **متباعدة** إذا وفقط إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية لها متباعدة

و بعبارة مبسطة يمكن القول أنّ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ متباعدة } \Leftrightarrow \{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ متباعدة}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ متقاربة } \Leftrightarrow \{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ متقاربة}$$

مثال:

لنثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متسلسلة متباعدة باعتماد التعريف :

من أجل ذلك نشكل متتالية المجاميع الجزئية :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n}$$

و من الممكن أن نكتبها بالشكل :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots$$

حيث وضعنا الأقواس هنا بحيث يكون القوس الأول يحوي 2 عنصراً و القوس التالي يحوي 2^2 عنصراً و القوس الثالث يحوي 2^3 عنصراً و هكذا .....

الآن يمكن أن نكتب :

$$S_n \geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)}_{=\frac{1}{2}} + \cdots$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

فمتتالية المجاميع الجزئية متباعدة و بالتالي متسلسلتها متباعدة

مثال: ادرس تقارب المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$s_n = \frac{1}{1}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{3} + \frac{1}{3}.\frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}.\frac{1}{(n+1)}$$

بالتفريق إلى كسور جزئية نجد:

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

المتسلسلة الهندسية:

ندعو المتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a.r^n$$

بالمتسلسلة الهندسية والتي حدها الأول هو a حيث $a \neq 0$

وأساسها هو r حيث $r \in \mathbb{R}$ وتعد هذه المتسلسلة من أهم المتسلسلات العددية وإن هذه المتسلسلة تكون متقاربة ومتباعدة تبعاً لقيم r حيث

$$s_n = a\,\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = a\,\frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

s_n متقاربة إذا كان $|r| < 1$

s_n متباعدة إذا كان $|r| \geq 1$

مثال: عن تقارب أو تباعد متسلسلة هندسية:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

لدراسة تقارب هذه المتسلسلة يمكن بالاعتماد على دراسة متتالية المجاميع الجزئية ولكن يمكننا أن نلاحظ بكل وضوح أنها متسلسلة هندسية أساسها $\frac{1}{2} < 1$ وبالتالي فهي متقاربة وحدها الأول هو 4 وبالتالي:

$$s_n = 4\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$$

دستور مجموع متسلسلة هندسية متقاربة: إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} ar^n$ متسلسلة هندسية متقاربة و أساسها $|r| < 1$ عندئذٍ تكون متقاربة و مجموعها يساوي :

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

مبرهنة: إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة فإن حدها العام يسعى إلى الصفر أي:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

لكن العكس غير صحيح لأن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة وحدها العام يسعى إلى الصفر.

نتيجة: إذا كانت نهاية الحد العام للمتسلسلة لا يسعى إلى الصفر فإن المتسلسلة متباعدة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}$$

نجد أن:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$$

فالمتسلسلة متباعدة.

مثال:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$$

متباعدة لأن حدها العام sin n لا يسعى إلى نهاية معينة أو محددة

الباقي النوني لمتسلسلة عددية غير نهائية : لتكن لدينا المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots$$

نعرف الباقي النوني لهذه المتسلسلة بالشكل : $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ و حيث أننا نعلم أن $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ نجد أن :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}_{s_n} + \underbrace{a_{n+1} + a_{n+2} \dots}_{r_n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s_n + r_n$$

مبرهنة:

إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة متقاربة فإن كل باقٍ من بواقيها متقارباً

البرهان:

لدينا و حسب ما عرفنا سابقاً أن :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s_n + r_n$$

و لما كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة فإنه يوجد $s \in \mathbb{R}$ بحيث $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و تحديداً هو نهاية متتالية مجاميعها الجزئية أي $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ و بالتالي :

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s_n + r_n$$

و بأخذ نهايات الطرفين :

$$S = S + \lim_{n\to\infty} r_n \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} r_n = 0 \in \mathbb{R}$$

أي $\{r_n\}$ متقاربة من الصفر

➢ و عليه يمكن أن نستنتج ما يلي:

_ إذا كانت أحد بواقي المتسلسلة متسلسلة متباعداً فإن المتسلسلة تكون متباعدة

_ إذا كانت أحد بواقي المتسلسلة متقارباً فإن المتسلسلة متقاربة

_ إذا حذفنا عدد محدود من حدود المتسلسلة الأولى فلا تؤثر في تقاربها أو تباعدها

المتتالية الكوشية:

نقول عن المتتالية العددية $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ إنها متتالية كوشية إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall \mathcal{E} > 0; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > m > N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$$

ملاحظات:

١- كل متتالية متقاربة هي كوشية و العكس صحيح

٢- نقول عن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ أنها متقاربة إذا كانت متتالية مجاميعها الجزئية هي متتالية كوشي

معايير تقارب وتباعد المتسلسلة

قاعدة المقارنة:

لتكن لدينا:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \;,\; \sum_{n=1}^{\infty} b_n \;:\; 0 < a_n \le b_n$$

1) إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة عندئذٍ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة

2) إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة عندئذٍ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة

مثال:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

متباعدة لأن: $\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ و $\sum \frac{1}{n}$ متباعدة فبالتالي حسب معيار المقارنة: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ متباعدة

قاعدة نهاية النسبة: ليكن لدينا :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$a_n > 0 \;\;,\;\; b_n > 0$$

$$A = \lim \frac{a_n}{b_n}$$

١- إذا كانت $0 < A < +\infty$ فإن المتسلسلتين من نوع واحد

٢- إذا كانت $A = 0$ و $\sum b_n$ متقاربة كانت $\sum a_n$ متقاربة

٣- إذا كانت $A = \infty$ و $\sum b_n$ متباعدة كانت $\sum a_n$ متباعدة

قاعدة دالمبير:

لتكن لدينا $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة عددية حيث $a_n > 0$ وكان:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$$

عندئذٍ:

1) إذا كان $0 \le D < 1 \Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة

2) إذا كان $D > 1 \Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة

3) إذا كان $D = 1$ يفشل المعيار بالحكم على المتسلسلة

مثال:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \; : \; a > 0$$

الحل:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a^n a}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{a^n} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{n+1} \right) = 0 < 1$$

وبالتالي حسب معيار دالمبير فهي متقاربة

قاعدة راب:

لتكن لدينا: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة عددية حيث $a_n > 0$ وكان:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left(n.\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \right)$$

عندئذٍ :

1) إذا كان $R > 1 \Leftarrow a_n$ $\sum_{n=1}^{\infty}$ متقاربة

2) إذا كان $R < 1 \Leftarrow a_n$ $\sum_{n=1}^{\infty}$ متباعدة

3) إذا كان $R = 1$ يفشل المعيار بالحكم على المتسلسلة

مثال:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{(a_{n+1})} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(n+1)^2}{n^2} - 1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n^2+2n+1-n^2}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+1}{n^2}\right) = 2 > 1$$

فيكون حسب راب المتسلسلة متقاربة.

"انتهت المحاضرة"

نذير تيناوي