هندسة تحليلية

الدكتورة: ميسم جديد

المحاضرة : السادسة

إعداد : منى + راما

Web: www.syriamath.net

group: Improve our mathematics

إعداد: منى ا★ لراما المحاضرة السادسة

تعيين نفس البعد عن المستويين

معادلتي المستويين الداخلي والخارجي لزاوية مستويين

يعرف المستوي المنصف لزاوية مستويين بأنه مجموعة النقاط المتساوية البعد عن كل من المستويين إذاً لإيجاد معادلة المستوي المنصف يجب أن نقوم بتحديد العلاقة التي تعطي بعد نقطة عن مستوي

١ بعد نقطة عن مستوي ٢: ليكن لدينا المستوي Q

$$Q(x,y,z) \equiv px+qy+rz+h=0$$

ولتكن M_0 إحداثياتها $M_0(x_0,y_0,z_0)$ نقطة لا تنتمي للمستوي Q، لإيجاد العلاقة التي تعطي بعد النقطة M_0 عن المستوي Q نقوم بإيجاد النقطة M_1 إحداثياتها $M_1(x_1,y_1,z_1)$ مسقط النقطة M_0 على المستوي Q، عندئذٍ يكون المتجه $\vec{M_1M_0}$ محمولاً على الناظم $\vec{N}$، وبالتالي يمكن إيجاد الجداء الداخلي بالشكل التالي:

$$\vec{M_1M_0}\cdot\vec{N} = |\vec{M_1M_0}|\,|\vec{N}|\cos\theta$$

حيث θ هي الزاوية بين $\vec{M_1M_0}$ و $\vec{N}$.

بما أن $\vec{M_1M_0}$ محمولة على $\vec{N}$ فإن الزاوية بينهما تساوي الصفر وجيب هذه الزاوية يساوي الواحد ومنه:

$$\vec{M_1M_0}\cdot\vec{N} = |\vec{M_1M_0}|\cdot|\vec{N}|$$

نرمز للقياس الجبري للمتجه $\vec{M_1M_0}$ بالرمز δ عندئذٍ يكون

$$\vec{M_1M_0}\cdot\vec{N} = \delta\,|\vec{N}| \Rightarrow \delta = \frac{\vec{M_1M_0}\cdot\vec{N}}{|\vec{N}|}$$

$$\delta = \frac{p(x_0-x_1)+q(y_0-y_1)+r(z_0-z_1)}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

Subject: هندسة تحليلية

$$\delta = \frac{px_0+qy_0+rz_0-(px_1+qy_1+rz_1)}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} \quad \text{العلاقة (1)}$$

النقطة M_1 تنتمي إلى المستوي Q ما يعني أنها تحقق معادلة هذا المستوي ومنه:

$$px_1+qy_1+rz_1+h=0 \Rightarrow h=-(px_1+qy_1+rz_1).$$

نعوض في العلاقة (1):

$$\delta = \frac{px_0+qy_0+rz_0+h}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} = \frac{Q(x_0,y_0,z_0)}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

ولكن البسط يمثل ناتج تعويض إحداثيات النقطة δ قياس جبري (إشارته يكون موجب أو يكون سالب) ومنه لإيجاد بعد النقطة M_0 عن المستوي Q نطبق التالي:

$$d=|\delta| = \frac{|Q(x_0,y_0,z_0)|}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

وهو قانون بعد نقطة عن مستوي.

- بالعودة إلى معادلتي المستويين المنصفين الداخلي والخارجي وانطلاقاً من القانون السابق نجد أنه:

إذا كان $Q_1 \equiv p_1x+q_1y+r_1z+h_1=0$ و $Q_2 \equiv p_2x+q_2y+r_2z+h_2=0$ مستويان متقاطعان فإن معادلتي المستويين المنصفين الداخلي والخارجي تعطى بالعلاقة التالية:

$$\frac{|Q_1(x,y,z)|}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}} = \frac{|Q_2(x,y,z)|}{\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}} \quad ★$$

ومنه يكون لدينا:

$$\frac{Q_1(x,y,z)}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}} = \mp\frac{Q_2(x,y,z)}{\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}}$$

إذاً فقد حصلنا على معادلتين معادلة موافقة للزائد ومعادلة موافقة للناقص

AL.SAMRAH

Subject :

لتمييز معادلة المنصف الداخلي أو المنصف الخارجي أسهل توازن الزائد أو الناقص، نأخذ الجداء الداخلي للناظمين فإذا كانت إشارة الجداء الداخلي أكبر من الصفر فإن الإشارة ناقص موافقة لمعادلة المستوي المنصف الداخلي والإشارة زائد المستوي المنصف الخارجي، أما إذا كانت إشارة الجداء الداخلي أصغر من الصفر فإن الإشارة زائد موافقة لمعادلة المستوي المنصف الداخلي والإشارة ناقص المستوي المنصف الخارجي.

مما سبق نستنتج بأن إشارة المستوي المنصف الداخلي مخالفة لإشارة الجداء الداخلي للناظمين

مثال: أوجد معادلتي المستويين المنصفين الداخلي والخارجي لزاويتي المستويين:

$$Q_1(x,y,z) = 2x+y+2z-1=0.$$

$$Q_2(x,y,z) = 4x+2y+4z-5=0$$

بتطبيق القانون * نحصل على الصيغة المطلقة:

$$\frac{|2x+y+2z-1|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|4x+2y+4z-5|}{\sqrt{16+4+16}}$$

ومنه:

$$\frac{2x+y+2z-1}{\sqrt{9}} = \mp\frac{4x+2y+4z-5}{\sqrt{36}}$$

لتمييز معادلة المنصف الداخلي والخارجي:

$$\vec{N_1}\cdot\vec{N_2} = 8+2+8 = 18 > 0$$

معادلة المستوي المنصف الداخلي:

$$\frac{2x+y+2z-1}{3} = -\frac{4x+2y+4z-5}{6}$$

نقوم بإصلاح هذه المعادلة نحصل على معادلة المنصف الداخلي.

أما معادلة المنصف الخارجي:

$$\frac{2x+y+2z-1}{3} = +\frac{4x+2y+4z-5}{6}$$

نقوم بإصلاح المعادلة نحصل على معادلة المستوي المنصف الخارجي.

«أسئلة امتحانية»

(1) أوجد بعد النقطة عن المستوي.

(2) أوجد معادلتي المستويين المنصفين الداخلي والخارجي لزاويتي مستويين.

AL SAMRAH