تحليل ١

الدكتور: نايف طلي

المحاضرة : الثانية

التاريخ : ١٦/١٠/٢٠١٦

إعداد : رهف + رسمية + شهيناز

المحاضرة الثانية 16 / 10 / 2016م

سوف تكون المحاضرة عبارة عن تعاريف ومصطلحات:

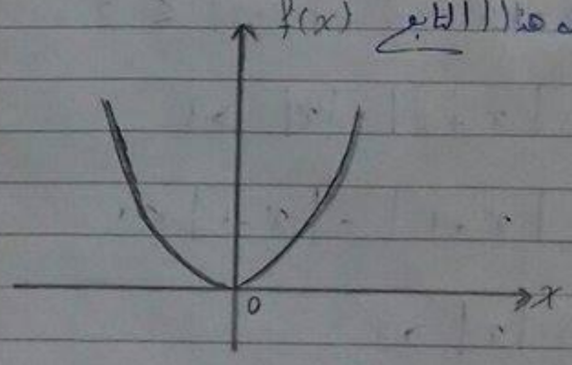
1] تعريف القيمة المطلقة
2] خواص القيمة المطلقة
3] مجالات المحور الحقيقي $\mathbb{R}$
4] المجموعة المحدودة..
5] أكبر عنصر في المجموعة maximum
أصغر عنصر في المجموعة minimum
6] أصغر حد أعلى supremum
أكبر حد أدنى infimum
7] خاصية أرخميدس
8] الاصحة الفرقية الواحدية
9] Q كثيفة في $\mathbb{R}$
10] مجموعة الأعداد الجبرية
11] تمارين.

١) تعريف القيمة المطلقة:

هي تابع

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & : x \geq 0 \\ -x & : x<0 \end{cases}$$

ويمثله هذا التابع



ملاحظة:

القيمة المطلقة وما قيمتها موجبة
حيث اذا كانت x قيمتها موجبة يخرج رقم موجب
واذا كانت x قيمتها سالبة يخرج رقم موجب

مثال..

$|5|=5 \qquad |-5|=5$

٢) خواص القيمة المطلقة:

① $|x| \geq 0$

لهذه المتراجحة من $x \in \mathbb{R}$

$|-x| \geq 0$

$\Longrightarrow |x|=|-x|$

② $|x| \leq k \quad ; \quad k \geq 0$

لأنه إذا كانت $k>0$ حيث مثلاً..

$|x|<-1$ هذا خاطئ

$\Longrightarrow -k < x < k$

ويمكن كتابتها: $x \in [-k,k]$

أما إذا كانت $|x|<k \; ; \; k>0$

$-k<x<k$

$x \in]-k,k[$

مثال:

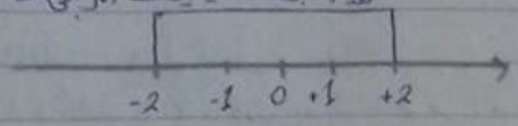
$|x| \leq 2$

فمعنى ذلك $-2 \leq x \leq 2$

①

و بالرسم..

هذا البعد الذي يحقق المتراجحة



3) $|x| \geqslant k \quad : \quad k > 0$

إما $x \leqslant -k$

أو $x \geqslant k$

وبالتالي هنا يمكن القول :

$x \in]-\infty, -k] \cup [k, +\infty[$

وإذا كانت $|x| > k$

فإنه :

$x \in]-\infty, -k[\cup]k, +\infty[$

مثال..

$|x| \geqslant 3$

إما $x \geqslant 3$ أو $x \leqslant -3$

$x \in]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$

4) $|x| - |y| \leqslant |x \mp y| \leqslant |x| + |y|$

5) $|x.y| = |x|\,|y|$

6) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad ; \quad y \neq 0$

7) $|x| = 0 \iff x = 0$

8) $|x+y| = |y+x|$

$|x-y| = |y-x|$

9) $|x+y| \gtreqless |x-y|$

حيث أننا لا نستطيع التحديد...

تمارين...

أوجد قيم x التي تحقق المعادلات (المتراجحات) التالية :

1) $|2x-4| < 2$

2) $|2x-4| = 2$

3) $|x| = x+5$

4) $|x| = x-5$

5) $|x^2 - 7x + 12| > x^2 - 7x + 12$

6) $|x-2| \geqslant 10$

7) $|x+2| + |x-2| \leqslant 2$

8) $|x+2| - |x| > 1$

9) $|x+1| - |x-1| < 1$

10) $|x| > x$

11) $-|x| < x$

12) $|x| < x$

13) $|x| < -2$

(2)

حل بعض التمارين :

1) $|2x - 4| < 2$

الحل : حسب الملاحظة الثانية نجد أن :

$-2 < 2x - 4 < 2$

$2 < 2x < 6$

وبالتالي فإن

$1 < x < 3$

أي أن $x \in]1, 3[$

2) $|x| = x + 5$

الحل...

$$|x| = x+5 \begin{cases} x = x+5 \Rightarrow 0 = 5 \\ \text{وهذا مستحيل} \\ -x = x+5 \Rightarrow -2x = 5 \\ \Rightarrow x = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

أي أن مجموعة حلول المعادلة هي $\{-\frac{5}{2}\}$

3) $|x| = x - 5$

الحل..

$$|x| = x-5 \Rightarrow \begin{cases} x = x-5 \Rightarrow 0 = -5 \\ \text{وهذا مستحيل} \\ -x = x-5 \Rightarrow -2x = -5 \\ \Rightarrow x = \frac{5}{2} \end{cases}$$

لكن إذا عوضنا $x = \frac{5}{2}$ بالمعادلة نجد أنه

$\frac{5}{2} = -\frac{5}{2}$

هذا غير ممكن أي مجموعة حلول المعادلة هي $\emptyset$

.. طريقة ثانية ..

بتربيع طرفي العلاقة نجد أن :

$x^2 = x^2 - 10x + 25$

وبحل هذه المعادلة

$x = \frac{5}{2}$

ولكن بتعويض في المعادلة نجد :

$\frac{5}{2} = -\frac{5}{2}$

وهذا غير ممكن أي مجموعة حلول المعادلة هي $\emptyset$

4) $|x^2 - 7x + 12| > x^2 - 7x + 12$

الحل..

أولاً ندرس قيمة المقدار $x^2 - 7x + 12$ ومتى يكون سالبة

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$x^2-7x+12$	$-\infty$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+\infty$

في أجل أن تكون المتراجحة محققة يجب أن تكون :

$x \in]3, 4[$

أي أن مجموعة حلول المتراجحة المطلوبة هي المجال $]3, 4[$

5) $|x - 2| \geq 10$

الحل

إما $x - 2 > 10$

$x \geq 12$

أي أن $x \in [12, +\infty[$

③

أو $x - 2 \leq -10$

عندئذ: $x \leq -8$

أي أنه $x \in]-\infty , -8]$

وبالتالي

$x \in]-\infty , -8] \cup [12 , +\infty[$

6) $|x| > |x+1|$

الحل...

نربع الطرفين $|x|^2 > |x+1|^2$

$x^2 > (x+1)^2$

$x^2 > x^2 + 2x + 1$

$0 > 2x + 1$

$2x < -1 \Longrightarrow x < -\frac{1}{2}$

$\Longrightarrow x \in]-\infty , -\frac{1}{2}[$

7) $|x+2| + |x-2| \leq 2$

الحل...

نربع الطرفين

$(|x+2| + |x-2|)^2 \leq 2^2$

$(|x+2|)^2 + 2|x+2| . |x-2| + (|x-2|)^2 \leq 4$

$\underbrace{2x^2+4}_{>0} + \underbrace{2}_{>0}\underbrace{|x^2-4|}_{\geq 0} \leq 0$

نلاحظ...

أن العلاقة الأخيرة مستحيلة في $\mathbb{R}$ وذلك لأنه مجموع مقادير موجبة واحد على الأقل منها موجب تماماً عندئذ مجموعها مقداراً موجباً تماماً

$\Leftarrow$ أي أنه مجموعة حلول المتراجحة هي مجموعة خالية

8) $|x+2| - |x| > 1$

الحل...

$|x+2| > 1 + |x|$

بتربيع الطرفين

$(|x+2|)^2 > (1+|x|)^2$

$x^2 + 4x + 4 > 1 + 2|x| + x^2$

$4x + 3 > 2|x|$

بالتربيع.. $16x^2 + 24x + 9 > 4x^2$

$12x^2 + 24x + 9 > 0$

بالتقسيم على (3) $\Leftarrow$ $4x^2 + 8x + 3 > 0$

$(2x+1)(2x+3) > 0$

إما $2x+1 > 0 \Leftarrow x > -\frac{1}{2}$

أو $2x+3 > 0 \Leftarrow x > -\frac{3}{2}$

تكون حلول المتراجحة هي $x \in]-\infty , -\frac{3}{2}]$

9) $\big||x+1| - |x-1|\big| < 1$

الحل.

بالتربيع الطرفين

$(||x+1| + |x-1||)^2 \leq 1^2$

$((|x+1|)^2 - 2|x+1|.|x-1| + |x-1|^2 < 1$

$x^2 + 2x + 1 - 2|x^2-1| + x^2 - 2x + 1 < 1$

$$2x^2+1 < 2.|x^2-1|$$

بالتقسيم على 2: $x^2+\frac{1}{2} < |x^2-1|$

بالتربيع: $(x^2+\frac{1}{2})^2 < (x^2-1)^2$

$$x^4+x^2+\frac{1}{4} < x^4-2x^2+1$$

$$3x^2<\frac{3}{4} \Longrightarrow x^2<\frac{1}{4} \Longrightarrow |x|<\frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

$\Leftarrow$ وبالتالي تكون مجموعة حلول المتراجحة هي المجال $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$

③ مجالات $\mathbb{R}$ الحقيقية:

تعريف المجال .. هو عبارة عن مجموعة القيم x التي تنتمي إلى $\mathbb{R}$ والمحصورة بين رقمين

- المجالات ثلاثة أنواع ...

1- المجال المفتوح ..

مثلاً: $\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$

$]a,b[\; : \; a\leq b$

ملاحظة:

إذا كانت $a=b$ أصبحت المجموعة خالية

$$]-\infty,b[=\{x\in\mathbb{R} ; -\infty<x<b\}$$

$$]a,+\infty[=\{x\in\mathbb{R} ; a<x<+\infty\}$$

2- المجال المغلق ..

$[a,b] \; ; \; a,b\in\mathbb{R} \; , \; a\leq b$

3- المجال نصف مفتوح (أو النصف مغلق)

$$]-\infty,b] : \{x\in\mathbb{R} ; -\infty<x\leq b\}$$

$$]a,b]=\{x\in\mathbb{R} ; a<x\leq b\}$$

$$[a,+\infty[=\{x\in\mathbb{R} ; a\leq x<+\infty\}$$

$$[a,b[=\{x\in\mathbb{R} ; a\leq x<b\}$$

- تعريف المجموعة:

هي عبارة عن مجموعة مجالات.

مثال..

$$A=[1,2]\cup]7,9]$$

- تعريف المجموعة المفتوحة:

نقول عن المجموعة $A\subseteq\mathbb{R}$ أنها مجموعة مفتوحة إذا حققت الشرط التالي:
من أجل أي عنصر x من A نستطيع إيجاد مجال مفتوح بحيث يكون هذا المجال محتوى في A أي...

$$\boxed{\forall x\in A ;\exists \,]a,b[\; ; x\in]a,b[\subseteq A}$$

- تعريف المجموعة المغلقة:

نقول عن المجموعة $B\subseteq\mathbb{R}$ أنها مجموعة مغلقة إذا لم نستطيع إيجاد مجال مفتوح محتوى تماماً وذلك من أجل عنصر واحد على الأقل من المجموعة B

أمثلة

إن المجال $]a;b[$ هو مجموعة مفتوحة لذلك ..

⑤

وذلك...

$\forall x \in]a,b[\; ; \; \exists\,]a,b[\;;$

$; \; x \in]a,b[\subseteq]a,b[$

أما المجموعة $[a,b]$ فهي مجموعة مغلقة وذلك بسبب ما يلي :

نلاحظ أنه من أجل $a \in [a,b]$

لا نستطيع إيجاد مجال $]a,b[$ بحيث:

$$a \in]a,b[\subseteq [a,b]$$

④ المجموعات المحدودة...

إذا كانت لدينا مجموعة A بحيث

$$A \subset \mathbb{R} , \quad A \neq \emptyset$$

نقول عن المجموعة A أنها محدودة إذا تحقق الشرط:

$$\exists M > 0 ; \forall x \in A \Rightarrow |x| \leq M$$

* إنشائياً (للفهم)...

(إذا وجد M أكبر من الصفر بحيث أياً كان x ينتمي إلى A فإن القيمة المطلقة لـ x أصغر أو تساوي M)

مثلاً...

$$A = [2,3[\cup]7,10]$$

بناءً على التعريف هل أستطيع أن أجد M؟ فالجواب نعم أستطيع أن أجد M ضمن هذا المجال ولكن اذا بدلنا..

$$A = [2,3[\cup]7,+\infty[$$

هنا لا أستطيع أن أجد M لأنها ليست محدودة..

- نقول عن مجموعة أنها محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأدنى بحيث:

$$\exists m, M \in \mathbb{R} : \forall x \in A \Rightarrow m \leq x \leq M$$

- نقول عن المجموعة A أنها محدودة من الأعلى إذا تحقق الشرط..

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in A \Rightarrow x \leq M$$

أمثلة

$]-\infty,+\infty[$ غير محدودة

$]2,+\infty[$ محدودة من الأعلى

- نقول عن المجموعة A إنها محدودة من الأدنى إذا تحقق الشرط،

$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in A \Rightarrow x \geq m$$

* مناقشة قبل تعريف أكبر أو أصغر عنصر في مجموعة :

إذا كان لدينا مجموعة أريد أن أجد أصغر حد أعلى وأكبر حد أدنى

فإذا كانت المجموعة محددة حتماً يوجد supremum و infimum

مثلاً...

$$A = [2,3[\cup]7,10[$$

2 أصغر عنصر

ولو أغلقت المجال عند 10 سوف يكون 10 أكبر عنصر

وإذا فتحت المجال من الطرفين لا أستطيع أن أجد أكبر ولا أصغر عنصر في المجموعة

هنا نبحث عن أصغر حد أعلى وأكبر حد أدنى

5) تعريف أكبر عنصر في مجموعة maximum

نقول عن b إنه أكبر عنصر في المجموعة A إذا تحقق الشرط..

$$\forall x \in A \Longrightarrow x \leq b \quad ; b \in A$$

$$\max(A) = b$$

- تعريف أصغر عنصر في مجموعة minimum

نقول عن a إنه أصغر عنصر في مجموعة A إذا اتحقق الشرط:

$$\forall x \in A \Longrightarrow x \geq a \quad ; a \in A$$

مثلاً"

$$A = [a, b] \; ; a \leq b$$

$$\max(A) = b$$

$$\min(A) = a$$

ملاحظة=

ليس بالضرورة وجود min و max في مجموعة بالذات توجد مجموعة تملك أحدها ومجموعات تملك كلاهما ومجموعات لا تملك أي منها وسنوضح ذلك بالأمثلة:

$$A_1 = \{2, 4, -2, 6, 3\}$$

$$\max A_1 = 6$$

$$\min A_1 = -2$$

$$A_2 = [1, 6]$$

$\max A_2 = 6$, $\min A_2 = 1$

$$A_3 =]1, 7[$$

$\max A_3 =$ غير موجود , $\min A_3 =$ غير موجود

$$A_4 = [1, 8[$$

$\max A_4 =$ غير موجود , $\min A_4 = 1$

6) تعريف أصغر حد أعلى Suplemum

(الحد الأعلى الأصغري)

نقول عن b_0 أنه أصغر حد أعلى للمجموعة A إذا تحقق الشرط التالي

1) $\forall x \in A \Longrightarrow x \leq b_0$

2) $\forall \varepsilon > 0 \; , \exists Z \in A \; ; Z > b_0 - \varepsilon$

ملاحظة

أننا لم نشترط انتماء b_0 إلى A ولكن إذا انتمى ليس خطأ

$$Sup(A) = b_0$$

- تعريف أكبر حد أدنى infimum

(الحد الأدنى الأكبري):

نقول عن a_0 إنه أكبر حد أدنى للمجموعة A إذا تحقق الشرط:

1) $\forall x \in A \Longrightarrow x \geq a_0$

2) $\forall \varepsilon > 0 \, , \exists Z \in A \; ; Z < a_0 + \varepsilon$

$$\inf(A) = a_0$$

ملاحظة=

في حالة المجال مغلق

$$Sup(A) = \max(A)$$

$$\inf(A) = \min(A)$$

7) خاصة أرخميدس..

مفهومها

من أجل أي عدد حقيقي موجب x وأي عدد حقيقي y نستطيع إيجاد عدد طبيعي n بحيث يتحقق

$$n.x > y$$

$$\left.\begin{array}{l} \forall x > 0 \\ \forall y \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \exists n \in \mathbb{N} \; ; n.x > y$$

7

8) الخاصية الفرقية الواصية :

إذا كان لدينا :

$\forall a,b \in \mathbb{R} : b-a > 1 \implies$
$\exists m \in \mathbb{Z} : a < m < b$

9) $\mathbb{Q}$ كثيفة في $\mathbb{R}$

(كثافة مجموعة الأعداد العادية في مجموعة الأعداد الحقيقية)

إن $\mathbb{Q}$ كثيفة في $\mathbb{R}$ أي لنأخذ بين أي عددين حقيقيين مختلفين يوجد عدد عادي

$\forall a,b \in \mathbb{R} : a < b \implies$
$\exists q \in \mathbb{Q} : a < q < b$

البرهان :

لدينا a,b بحيث $b > a$

$b - a > 0$

نختار عدد مثلاً : $1 \in \mathbb{R}$

* نطبق خاصة أرخميدس .

بأن $b-a > 0$
$1 \in \mathbb{R}$ $\exists n \in \mathbb{N} ; n(b-a) > 1$

$nb - na > 1$

* نطبق خاصة أرخميدس .

$\exists m \in \mathbb{Z} ; na < m < nb$
$a < \frac{m}{n} < b$

$\implies \exists q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} : a < q < b$

انتهت المحاضرة