المعادلات التفاضلية 1

الدكتور : خليل يحيى

المحاضرة : الثالثة

التاريخ : ١٩/١٠/٢٠١٦

Web: www.syriamath.net group: Improve our mathematics

نتابع في حل بعض الأمثلة عن المعادلات التفاضلية المتجانسة:

مثال(٢): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\boldsymbol{x.y' = x.e^{\frac{y}{x}} + y}$$

الحل: نقسم الطرفين على $x \neq 0$:

$$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$$

لدينا الدالة:

$$f(x,y) = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow f(\lambda x, \lambda y) = e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}} + \frac{\lambda y}{\lambda x} = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} = f(x,y)$$

إذاً المعادلة التفاضلية متجانسة من الدرجة صفر.

لإيجاد الحل العام نفرض: $\boldsymbol{z = \frac{y}{x}}$

$\Rightarrow y = x.z$ بالاشتقاق $\Rightarrow y' = z + x'z$

نعوض في المعادلة:

$$z + x'z = e^z + z \Rightarrow x'z = e^z$$

وهذه المعادلة الأخيرة هي معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحولات:

$$\Rightarrow x\frac{dz}{dx} = e^z \Rightarrow \frac{x}{dx} = \frac{e^z}{dz} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dz}{e^z} = e^{-z}.dz$$

والآن نكامل الطرفين:

$$\Rightarrow ln|x| = -e^{-z} + ln|c| \Rightarrow ln\left|\frac{x}{c}\right| = -e^{-z}$$

والآن نعود فنعوض قيمة z :

$$\Rightarrow \boxed{ln\left|\frac{x}{c}\right| = -e^{-\frac{y}{x}}}$$

مثال(٣): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\boldsymbol{y' = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}}$$

الحل: لدينا الدالة:

$$f(x,y) = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y}{\lambda x} + \tan\frac{\lambda y}{\lambda x} = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x} = f(x,y)$$

إذاً المعادلة التفاضلية متجانسة.

لإيجاد الحل العام لها ، نفرض: $\boldsymbol{z = \frac{y}{x}}$

$$\Rightarrow y = z.x \text{ بالاشتقاق } \Rightarrow y' = z + x.z'$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية يكون:

$$z + x.z' = z + \tan z \Rightarrow x.z' = \tan z$$

وهي معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحولات:

$$\Rightarrow x\frac{dz}{dx} = \tan z \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{1}{\tan z}.dz$$

نكامل الطرفين ثم نعوض قيمة z فنحصل على الحل العام المطلوب:

$$\int\frac{dx}{x} = \int\frac{1}{\tan z}.dz = \int\frac{\cos z}{\sin z}.dz$$

$$\Rightarrow \ln|x| = \ln|\sin z| + \ln|c| \Rightarrow \ln|x| = \ln|c.\sin z|$$

$$\Rightarrow x = c\sin z$$

والآن نعود فنعوض قيمة z :

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x}{c} = \sin\frac{y}{x}}$$

وهو الحل العام المطلوب للمعادلة التفاضلية.

مثال(٤): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\boldsymbol{2yxy' = x^2 + y^2}$$

الحل: نقسم الطرفين على $2yx$:

$$\Rightarrow y' = \frac{x}{2y} + \frac{y}{2x}$$

لدينا الدالة:

$$f(x,y) = \frac{x}{2y} + \frac{y}{2x} \Rightarrow f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x}{2\lambda y} + \frac{\lambda y}{2\lambda x} = \frac{x}{2y} + \frac{y}{2x} = f(x,y)$$

إذاً المعادلة التفاضلية متجانسة ، لإيجاد الحل العام لها نفرض: $\boldsymbol{z = \frac{y}{x}}$

$$\Rightarrow y = z.x \text{ بالاشتقاق } \Rightarrow y' = z + x.z'$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية يكون:

$$z + x.z' = \frac{1}{2z} + \frac{z}{2} \Rightarrow x.z' = \frac{1}{2z} - \frac{z}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} - z\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-z^2}{z}\right)$$

وهي معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحولات:

$$\Rightarrow x\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-z^2}{z}\right) \Rightarrow \frac{dx}{x} = \left(\frac{2z}{1-z^2}\right).dz$$

نكامل الطرفين:

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{-2z}{1-z^2}.dz$$

$$\Rightarrow ln|x| + ln|c| = -ln|1-z^2| \;\Rightarrow\; ln|x.c| = -ln|1-z^2| \Rightarrow x.c = \frac{1}{1-z^2}$$

والآن نعود فنعوض قيمة z :

$$x.c = \frac{1}{1-\frac{y^2}{x^2}} = \frac{1}{\frac{x^2-y^2}{x^2}} = \frac{x^2}{x^2-y^2} \Rightarrow x^2 - y^2 = \frac{x}{c}$$

$$\Rightarrow \boxed{y^2 = x^2 - \frac{x}{c}}$$

((المعادلات التفاضلية التي ترد إلى متجانسة))

يمكن حل بعض المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى بإرجاعها إلى معادلات تفاضلية متجانسة وبعد ذلك إرجاعها إلى معادلات ذات متحولات قابلة للفصل ، ومن ثمَّ إيجاد الحل العام.

١) المعادلة التفاضلية من الشكل: $y' = f(ax + by + c)$

هذه المعادلة يمكن إرجاعها بفرض: $ax + by + c = z$

مثال على ذلك:

$$y' = (2x + y)^2$$

الحل: نفرض: $z = 2x + y$

$$\Rightarrow dz = 2dx + dy \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2 + z^2$$

وهي معادلة قابلة لفصل المتحوّلات:

$$\frac{1}{2 + z^2}.dz = dx$$

٢) المعادلة التفاضلية من الشكل: $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$

نلاحظ هنا أن المعادلتان الخطيّتان:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 & \dots D_1 \\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 & \dots D_2 \end{cases}$$

يمثلان معادلتي مستقيمين وليكونا D_1 و D_2 وعندها نميِّز ثلاث حالات:

$$\mathbf{1)}\quad \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \lambda$$

وفي هذه الحالة نلاحظ أن المستقيمان D_1 و D_2 منطبقان وبالتالي يكون:

$$y' = f(\lambda) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(\lambda) \Rightarrow dy = f(\lambda).dx$$

$$\Rightarrow \boxed{y = x.f(\lambda) + c}$$

وهو الحل العام.

$$2)\quad \frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}\neq\frac{c}{c_1}$$

وفي هذه الحالة يكون المستقيمان D_1 و D_2 متوازيان ولحل هذه المعادلة نفرض:

$$z=ax+by$$

وبتفاضل الطرفين يكون:

$$dz=a.dx+b.dy$$

وهذه المعادلة قابلة لفصل المتحولات..

(ممكن أن تكون غير قابلة للفصل مباشرة فنردها إلى معادلة تفاضلية قابلة للفصل ثم نوجد الحل العام).

$$3)\quad \frac{a}{a_1}\neq\frac{b}{b_1}$$

في هذه الحالة يكون المستقيمان D_1 و D_2 متقاطعان وعندها يمكن كتابة معادلتي المستقيم كمعادلتين خطيتين متجانستين ، وذلك بنقل المحاور إلى نقطة تقاطعهما (يجب إيجاد نقطة التقاطع)

وبالتالي إذا فرضنا أنَّ $M(\alpha,\beta)$ هي نقطة التقاطع، نأخذ التحويل التالي ، باستخدام دساتير الانسحاب:

$$\begin{cases}x=X+\alpha\\ y=Y+\beta\end{cases}$$

وبعد ذلك نفرض التحويل: $\boldsymbol{z=\frac{y}{x}}$

ثمّ نعوّض بالمعادلة فنحصل على معادلة قابلة للفصل أو(معادلة ترد إلى معادلة قابلة للفصل)

ومن ثمّ نوجد الحل العام.

مثال(١): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\boldsymbol{(x+y+1)dx-(2x+2y+2)dy=0}$$

الحل: نكتب:

$$(x+y+1)dx-2(x+y+1)dy=0$$

نقسم الطرفين على المقدار: $(x+y+1)\neq 0$

$$\Rightarrow dx - 2dy = 0 \;\Rightarrow dy = \frac{1}{2}.dx \;\Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}x + c}$$

مثال(٢): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(x - y + 1).dx + (x - y + 2).dy = 0$$

الحل:

لدينا المستقيمان:

$$D_1 : \; x - y + 1$$
$$D_2 : \; x - y + 2$$

نلاحظ أنَّ: $\frac{-1}{-1} = \frac{1}{1}$ إذاً فالمستقيمان D_1 و D_2 متوازيان

بفرض: $z = x - y$ بالتفاضل $\Leftarrow$ $dz = dx - dy$ $\Leftarrow$ $dy = dx - dz$

نعوض في المعادلة:

$$\Rightarrow (z + 1).dx + (z + 2)(dx - dz) = 0$$

$$\Rightarrow z.dx + dx + z.dx + 2.dx - z.dz - 2.dz = 0$$

$$\Rightarrow (2z + 3).dx - (z + 2).dz = 0$$

$$\Rightarrow dx = \frac{z + 2}{2z + 3}.dz$$

نضرب ونقسم على 2 :

$$\Rightarrow dx = \frac{2z + 4}{2(2z + 3)}.dz = \frac{2z + 3 + 1}{2(2z + 3)}.dz = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2z + 3}\right].dz$$

نكامل الطرفين:

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}\int \left(1 + \frac{1}{2}.\frac{2}{2z + 3}\right).dz$$
$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}ln|2z + 3| + ln|c|$$

نعود فنعوض قيمة z :

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}(x-y) + \frac{1}{4} ln|2(x-y)+3| + ln|c|$$

وهو الحل العام.

مثال(٣): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\boldsymbol{y' = \frac{3x - y + 5}{x + y - 1}}$$

الحل:

لدينا المستقيمان:

$$D_1 : \ 3x - y + 5$$
$$D_2 : \ x + y - 1$$

نلاحظ أنَّ: $\frac{-1}{1} \neq \frac{3}{1}$ إذاً فالمستقيمان D_1 و D_2 متقاطعان

ولإيجاد نقطة التقاطع $M(\alpha, \beta)$ نحل جملة معادلتيهما حل مشترك:

من معادلة D_2 نجد: $x = -y + 1 \ldots (*)$

نعوض $(*)$ في معادلة D_1: $-3y + 3 - y + 5 = 0$

$$\Rightarrow -4y = -8 \Rightarrow y = 2$$

نعوض قيمة y في $(*)$: $x = -2 + 1 \Rightarrow x = -1$

ومنه فنقطة التقاطع هي: $M(-1,2)$

والآن نجري التحويل:

$$\begin{cases} x = X + \alpha \ \Rightarrow x = X - 1 \Rightarrow dx = dX \\ y = Y + \beta \ \Rightarrow y = Y + 2 \Rightarrow dy = dY \end{cases}$$

نعوض في المعادلة التفاضلية:

$$y' = \frac{3(X-1) - (Y+2) + 5}{(X-1) + (Y+2) - 1} = \frac{3X - Y}{X + Y}$$

نقسِّم البسط والمقام على $X \neq 0$:

$$\Rightarrow y' = \frac{3 - \frac{Y}{X}}{1 + \frac{Y}{X}}$$

نفرض: $Y' = Z + XZ' \Leftarrow Y = Z.X \Leftarrow Z = \frac{Y}{X}$

نعوض في المعادلة التفاضلية:

$$\Rightarrow Z + XZ' = \frac{3 - Z}{1 + Z} \Rightarrow XZ' = \frac{3 - Z}{1 + Z} - Z$$

$$\Rightarrow X\frac{dZ}{dX} = \frac{3 - Z - Z - Z^2}{1 + Z} = \frac{-Z^2 - 2Z + 3}{1 + Z}$$

وهي معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحولات..

$$\Rightarrow \frac{X}{dX} = \frac{-Z^2 - 2Z + 3}{1 + Z}.\frac{1}{dZ} \Rightarrow -\frac{dX}{X} = \frac{Z + 1}{Z^2 + 2Z - 3}.dZ$$

$$\Rightarrow -\frac{dX}{X} = \frac{1}{2}.\frac{2Z + 2}{Z^2 + 2Z - 3}.dZ$$

نكامل الطرفين:

$$\Rightarrow -ln|X| + ln|c| = \frac{1}{2}ln|Z^2 + 2Z - 3|$$

$$\Rightarrow ln\left|\frac{c}{X}\right| = ln|Z^2 + 2Z - 3|^{\frac{1}{2}} = ln\sqrt{Z^2 + 2Z - 3}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{X} = \sqrt{Z^2 + 2Z - 3}$$

نعود فنعوض قيمة Z :

$$\Rightarrow \frac{c}{X} = \sqrt{\frac{Y^2}{X^2} + 2\frac{Y}{X} - 3}$$

والآن نعوض: حيث لدينا:

$$\begin{cases} Y = y - 2 \\ X = x + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{c}{x+1} = \sqrt{\frac{(y-2)^2}{(x+1)^2} + 2\frac{(y-2)}{(x+1)} - 3}}$$

((المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى))

نقول عن المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى إنّها خطيّة إذا كانت من الشكل:

$$y' + p(x)y = q(x) \ldots (1)$$

حيث أنَّ $q(x)$ و $p(x)$ دالتان معرفتان ومستمرتان على مجال $[a,b]$ من $\mathbb{R}$

- إذا كانت $q(x) = 0$ عندئذٍ تصبح المعادلة (1) من الشكل:

$$y' + p(x)y = 0$$

وتسمَّى: معادلة تفاضلية خطيّة متجانسة أو معادلة تفاضلية (بدون طرف ثاني).

- أما إذا كانت $q(x) \neq 0$ فتسمَّى المعادلة (1) خطية غير متجانسة أو مع طرف ثاني.

والآن سنذكر فيما يلي **خطوات ايجاد الحل العام** للمعادلة السابقة:

١) نوجد حل العام للمعادلة التفاضلية الخطية دون طرف ثانٍ:

$$y' + p(x)y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -p(x)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x).dx$$

$$\Rightarrow ln|y| = -\int p(x).dx + ln|c| \Rightarrow ln|y| - ln|c| = -\int p(x).dx$$

$$\Rightarrow ln\left|\frac{y}{c}\right| = -\int p(x).dx \Rightarrow \frac{y}{c} = e^{-\int p(x).dx}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = c.e^{-\int p(x).dx}}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة (دون طرف ثانٍ).

٢) نوجد حل خاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة (مع طرف ثانٍ):

ومن أجل ذلك نجعل الثابت c تابع ل x فنكتب الحل العام السابق بالشكل:

$$y = c(x).e^{-\int p(x).dx} \dots (2)$$

ثمَّ نشتق الطرفين بالنسبة لــ x :

$$\Rightarrow y' = c'(x).e^{-\int p(x).dx} - c(x).p(x).e^{-\int p(x).dx}$$

والآن نعوض في المعادلة التفاضلية مع طرف ثانٍ (1):

$$\Rightarrow c'(x).e^{-\int p(x).dx} - c(x).p(x).e^{-\int p(x).dx} + p(x)c(x).e^{-\int p(x).dx} = q(x)$$

$$\Rightarrow c'(x).e^{-\int p(x).dx} = q(x) \Rightarrow c'(x).\frac{1}{e^{\int p(x).dx}} = q(x)$$

$$\Rightarrow c'(x) = e^{\int p(x).dx}.q(x)$$

نكامل الطرفين:

$$\Rightarrow c(x) = \int q(x).e^{\int p(x).dx}.dx + c_1$$

نعوض قيمة $c(x)$ في العلاقة (2) فنحصل على الحل العام المطلوب:

$$\boxed{y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x).e^{\int p(x).dx}.dx + c_1\right]}$$

انتهت المحاضرة ..

مع تحيات فريق سيريا ماث

☺ لا تنسونا من صالح دعواتكم ☺

Mohammad Al-shahla