البنى الجبرية 1

الدكتور : حمزة الحاكمي

المحاضرة : الخامسة

التاريخ : ١٠/١٠/٢٠١٦

إعداد : أحمد أبو التوت

المحاضرة عبارة عن فقرة جديدة وهي قدرة المجموعات و المجموعات متساوية القدرة كتعاريف وتمهيديات ومبرهنات واخيرا مثال .

تعريف : لتكن A مجموعة ما . نسمي كمية العناصر في A بقدرة المجموعة A ونرمز لذلك $card\ A$.

_ اذا كان $card\ A < \infty$ تكون المجموعة في هذه الحالة منتهية وقدرتها هي عدد العناصر في A.

_ اذا كان $card\ A = \infty$ تكون في هذه الحالة A مجموعة غير منتهية .

تعريف :

لتكن A, B مجموعتين اختياريتين نقول أن :

$$card\ A = card\ B \Leftrightarrow \exists\ f: A \xrightarrow[\text{متباين}]{\text{غامر}} B$$

نرمز لذلك :

$$A \sim B$$

تمهيدية: (وظيفة)

لتكن Σ اسرة من المجموعات ان العلاقة $(\sim)$ المعرفة على Σ هي علاقة تكافؤ على Σ.

البرهان : لنعرف العلاقة

$$A \sim B \Leftrightarrow card\ A = card\ B \Leftrightarrow \exists\ f: A \xrightarrow[\text{متباين}]{\text{غامر}} B$$

_ من اجل اي مجموعة $A \in \Sigma$ يوجد تطبيق مطابق : $f = I_A: A \longrightarrow A$

$$a \mapsto f(a) = a$$

وهو متباين وغامر فرضاً واستنادا لتعريف العلاقة $(\sim)$ فإن $(A \sim A)$ ومنه فإن $(\sim)$ انعكاسية .

_ من اجل اي مجموعة $A, B \in \Sigma$ وبحيث $A \sim B$ فإنه يوجد تطبيق

$$f: A \xrightarrow[\text{متباين}]{\text{غامر}} B$$

وبما ان التطبيق f تقابل فيوجد تطبيق عكسي وليكن

$$f^{-1}: B \xrightarrow[\text{متباين}]{\text{غامر}} A$$

وهذا يعني ان $B \sim A$ وبالتالي فالعلاقة $(\sim)$ تناظرية

_ من اجل اي مجموعة $\Sigma \ni A, B, C$ وبحيث $A\sim B$ و $B\sim A$ فإنه يوجد تطبيق

$$f: A \xrightarrow[\text{متباين}]{\text{غامر}} B$$

$$g: B \xrightarrow[\text{متباين}]{\text{غامر}} C$$

ومنه فإن التطبيق و $h = f \circ g : A \xrightarrow[\text{متباين}]{\text{غامر}}$ وبما ان h تقابل فيؤدي الى ان $A\sim C$ وبالتالي العلاقة $(\sim)$ متعدية .

مما سبق نستنتج ان العلاقة $(\sim)$ هي علاقة تكافؤ على Σ.

ملاحظة : ان صفوف تكافؤ هذه العلاقة هي المجموعات المتساوية القدرة.

تعريف :

لتكن A, B مجموعتين اختياريتين نقول أن قدرة المجموعتين :

$$card\ A \leq card\ B \Leftrightarrow \exists\, f : A \overset{\text{متباين}}{\hookrightarrow} B$$

مبرهنة : ((كانتور – برنشتاين)) :

لتكن $A\,, B$ مجموعتين اختياريتين إذا وجد تطبيق متباين $f\ : A \longrightarrow B$ وتطبيق متباين اخر $g\ : B \longrightarrow A$ عندئذ : أي $A\ \sim B$

$$card\ A = card\ B$$

تمهيدية : (وظيفة)

العلاقة " $\leq$ " المعرفة على أي مجموعة من القدرات هي علاقة ترتيب .

البرهان :

- لأجل أي مجموعة يوجد ما يسمى التطبيق المطابق وهو يمثل تطبيق متباين
$I_A : A \longrightarrow A$

ومنه العلاقة " $\leq$ " علاقة انعكاسية .

- العلاقة " $\leq$ " متعدية لان :

$$card\ A \leq card\ B \quad \Leftrightarrow \exists\, f : A \overset{\text{متباين}}{\hookrightarrow} B$$

$$card\ B \leq card\ D \quad \Leftrightarrow \exists\, g : B \overset{\text{متباين}}{\hookrightarrow} D$$

$$f : A \overset{\text{متباين}}{\Longrightarrow} B \overset{\text{متباين}}{\Longrightarrow} D$$

ومنه $f : A \to D$ متباين $\Longleftarrow$ أن العلاقة $(*)$متعدية .

لإثبات أن العلاقة " $\leq$ "تخالفيه نكتفي بنص مبرهنة **((كانتور – برنشتاين))** وبما انه يوجد تطبيق f متباين وتطبيق g متباين وحسب المبرهنة فإن $card\ A = card\ B$ وبالتالي فالعلاقة تخالفية .

وبالتالي فإن $\leq$ هي علاقة ترتيب .

مبرهنة : لتكن A مجموعة ما. $P(A)$ أسرة كل المجموعات الجزئية في A عندئذ:

$$card\ A < card\ P(A)\ ....\quad (*)$$

البرهان : نميز حالتين

1) $A = \emptyset$ في هذه الحالة $card\ A = 0 < 1 = card\ P(A)$ يتم المطلوب.

2) $A \neq \emptyset$ عندئذ نعرف التطبيق $f : A \to P(A)$

$$\forall\, a \in A\, ; f(a) = \{a\}$$

عندئذ هذا التطبيق دوما متباين .

وحسب التعريف $card\ A \leq card\ P(A)\quad ....\quad (1)$

بقي ان نتخلص من اشارة المساواة في العلاقة (1)

لنفرض جدلاً ان $card\ A = card\ P(A)$ وحسب التعريف يوجد تطبيق تقابل $g : A \to P(A)$

لنأخذ المجموعة $H = \{a : a \in A\ ,\ a \notin g(a)\}$

- H مجموعة جزئية في A ومنه $H \in P(A)$.

إن $H \neq \emptyset$ لانه لو كان $H = \emptyset$ عند ذ ولكون g غامر فإنه يوجد $d \in A$ بحيث $d \in g(d) = \emptyset$

وهذا تناقض لان g غامر أي أن $H \neq \emptyset$.

- بما أن g غامر يوجد $t \in A$ بحيث $H = g(t) \ni t$ نميز حالتين :

١) $H = g(t) \not\ni t$ حيث $t \in H$.

٢) $H = g(t) \ni t$ حيث $t \notin H$.

وفي كلا الحالتين نحصل على تناقض .

وجود هذا التطبيق g يؤدي الى كل هذا التناقض الذي حصلنا عليه أي هذا التطبيق غير موجود بمعنى اخر $card\ A \neq card\ P(A)$

ومنه $card\ A < card\ P(A)$.

و هو المطلوب.

تعريف :

نقول عن المجموعة A أنها قابلة للعد إذا كان $card\ A = card\ \mathbb{N}^*$.

أي انه اذا وجد تطبيق تقابل $f: A \longrightarrow \mathbb{N}^*$ او $f: \mathbb{N}^* \longrightarrow A$

ونرمز لقدرة مجموعة الاعداد N بالشكل $\aleph_0$ ⟵ وتقرأ (ألف صفر).

تمرين :

أثبت أن : $card\ N^* = card\ Z$

أي ان المجموعة Z قابلة للعد

الحل : لنعرف العلاقة $f : Z \to N^*$ بالشكل التالي :

$$\forall\, n \in Z \ ;\ f(n) = \begin{cases} 2n+1 & n \geq 0 \\ 2|n| & n < 0 \end{cases}$$

إن f تطبيق لأنه إذا كان $n, m \in z$ بحيث $n = m$ عندئذ :

في حالة $; n,m \geq 0$ $\quad 2n+1 = 2m+1$

$$\Rightarrow f(n) = f(m)$$

في حالة $; n,m < 0$ $\quad 2|n| = 2|m|$

$$-n = -m$$

$$\Rightarrow f(n) = f(m)$$

ففي كلا الحالتين f تطبيق .

كما إن f متباين لأنه إذا كان $n, m \in z$ بحيث $f(n) = f(m)$ فإن :

- $n,m \geq 0 \ \Leftarrow\ 2n+1 = 2m+1 \ \Leftarrow\ n = m$
- $n,m < 0 \ \Leftarrow\ 2|n| = 2|m| \ \Leftarrow\ -n = -m \ \Leftarrow\ n = m$
- $m < 0\ , n \geq 0 \ \Leftarrow\ 2n+1 = 2|m| = -m$

$$m = -\frac{2n+1}{2}$$

بفرض $n = 0$

مرفوض $m = -\frac{1}{2} \notin Z$

ومنه الحالة الثالثة لا يمكن أن تكون موجودة ومنه f متباين .

واخيراً إن f غامر لأنه :

ليكن $n \epsilon N^*$ عندئذ تميز حالتين :

n زوجي عندئذ : $\frac{n}{2} \epsilon z$ و $-\frac{n}{2} \epsilon z$

كون $-\frac{n}{2} \epsilon z$ عنصر في المنطلق لذلك بإمكان أخذ الصورة المباشرة له .

$$f\left(\frac{-n}{2}\right) = 2\left|\frac{-n}{2}\right| = -(-n) = n$$

n فردي ومنه$n-1$ زوجي كما ان $0 \leq n-1$

عندئذ: $0 \leq \frac{n-1}{2} \epsilon z$

$$f\left(\frac{n-1}{2}\right) = 2\left(\frac{n-1}{2}\right) + 1 = n$$

ومما سبق نجد أن التطبيق f غامر

وبالتالي فهو تقابل أي ان .

$$\Rightarrow card\ N^* = card\ Z$$

وهو المطلوب

وظيفة : اثبت ان مجموعة الاعداد الصحيحة الزوجية الموجبة (الفردية) كل منهما قابلة للعد .

وظيفة : اثبت ان مجموعة الاعداد الاولية قابلة للعد .

حل هذه الوظيفتان يتم بنفس طريقة التمرين الاخير فقط التغيير باختيار قاعدة ربط مناسبة.

"انتهت المحاضرة"