المعادلات التفاضلية ١

الاستاذ : عبد الله المليح

المحاضرة :الأولى عملي

التاريخ : ٩/١٠/٢٠١٦

Web: www.syriamath.net
group: Improve our mathematics

مرحباً بكم أصدقائي من جديد ونشكركم على ثقتكم
وكما عودناكم في محاضرات النظري نبدأ معكم الآن في محاضرات العملي؛

بعض المفاهيم الأساسية:

فيما يلي توضيح يلي بعض المصطلحات والمفاهيم التي سنستخدمها في المقرر:

$$\boldsymbol{y = y(x)}$$

هي دالة تابعة لمتحول واحد وهو x ، حيث x متحول مستقل ، y هو التابع ،
ومن الممكن أن يكون x تابع لمتحول آخر مثلاً: $x = x(t)$

$$\boldsymbol{Z = f(x,y)}$$

Z هو تابع بمتحوّلين مستقلّين هما x,y

$$\boldsymbol{y' = \frac{dy}{dx}}$$

d : تفاضل تام (الاشتقاق بالنسبة لمتحول واحد) .

∂ تفاضل جزئي (الاشتقاق بالنسبة لأكثر من متحول) .

فإذا كان لدينا دالة $f(x,y)$ تابعة لمتحولين مستقلّين فإننا نرمز:

$\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x}}$ المشتق الجزئي الأول

$\boldsymbol{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}$ المشتق الجزئي الثاني

$\boldsymbol{\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}}$ المشتق المختلط

مثال:

$$f(x,y) = cos(xy) + x^2y^3$$

فيكون:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -y.sin(xy) + 2x.y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x.sin(xy) + 3x^2.y^2$$

مثال(٢):

$$x^2 + 2y^2 = 4 \ ; \ y = y(x)$$

فيكون الاشتقاق بالنسبة لــ x :

$$2x + 4yy' = 0$$

لأنَّ y تابعة لـ x .

مثال(٣):

$$xy + \sin y = 3 \ ; \ y = y(x)$$

بالاشتقاق بالنسبة لـ x نجد :

$$y + xy' + y'.\cos y = 0$$

المعادلة التفاضلية :

هي كل علاقة تربط بين المتحوّل المستقل x والمتحوّل y التابع لـ x ومشتقات التابع y بالنسبة لـ x .
وإيجاد حل المعادلة هو إيجاد القيم المجهولة التي تجعل المعادلة محققة .

أمثلة عن تشكيل معادلة تفاضلية بطريقة حذف الثوابت الاختيارية :

مثال (١):

$$x^2 + y^2 = cx$$

تحوي ثابت واحد لذلك ، نشتق مرة واحدة:

$$2x + 2yy' = c$$

نعوّضها:

$$x^2 + y^2 = 2x^2 + 2yy'$$
$$x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$$

مثال (٢):

أوجد المعادلة التفاضلية لمجموعة المنحنيات:

$$\boldsymbol{y = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x)}$$

الحل:

نلاحظ أن المعادلة السابقة تحوي ثابتين اختياريين هما c_1 و c_2 لذلك نشتق مرتين:

$$y' = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + e^x(-c_1 \sin x + c_2 \cos x)$$

$$\boxed{y' = y + e^x(-c_1 \sin x + c_2 \cos x)} \ldots (1)$$

$$\Rightarrow y'' = y' + e^x(-c_1 \sin x + c_2 \cos x) + e^x(-c_1 \cos x - c_2 \sin x)$$

$$\boxed{y'' = y' + e^x(-c_1 \sin x + c_2 \cos x) - y} \ldots (2)$$

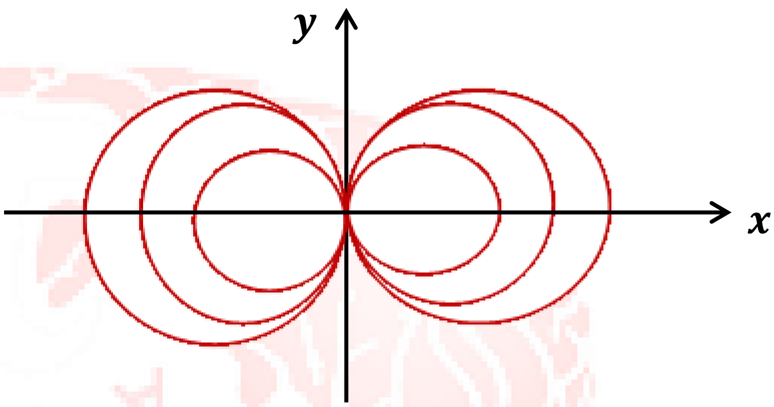
بطرح (1) من (2) :

$$y'' - y' = y' - 2y \Rightarrow \boxed{y'' - 2y' + 2y = 0}$$

مثال (٢):

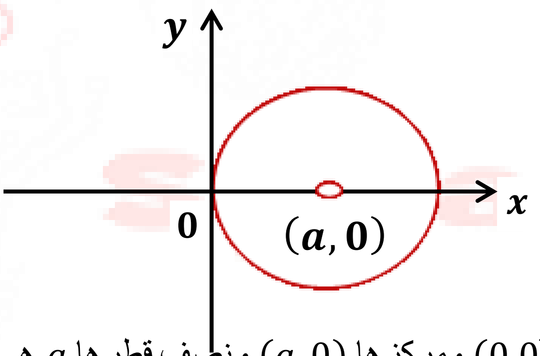
أوجد المعادلة التفاضلية لدوائر المستوي (هي عبارة عن منحنيات) oxy التي تمس محور oy في المبدأ

الحل:



بما أن الدوائر تمس محور oy في المبدأ إذاً فإن مراكز هذه الدوائر تقع على المحور ox

وستكون احداثيات مركزها من الشكل: $(a,0)$ حيث أنصاف أقطارها تساوي $|a|$



ونعلم أن معادلة الدائرة التي تمر من نقطة $(0,0)$ ومركزها $(a,0)$ ونصف قطرها a هي:

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2 \dots (1)$$

نلاحظ أن المعادلة السابقة تحوي ثابت اختياري واحد هو a لذلك نشتق مرة واحدة:

$$2(x-a) + 2yy' = 0 \;\Rightarrow a = x + yy'$$

والآن نعوض قيمة a في العلاقة (1) فنحصل على المعادلة التفاضلية المطلوبة:

$$y^2.y'^2 + y^2 = (x+yy')^2$$

$$y^2.y'^2 + y^2 = x^2 + 2yy'x + y^2.y'^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 2yy'x - y^2 = 0$$

تمارين الوظيفة:

طلب الأستاذ حل التمارين التالية من الكتاب:

٣٣/١ و ٣٤/٢ و ٣٨/٦ و ٣٤/٨ و ٣٤/٩

حل أحد تمارين (الوظيفة):

أوجد المعادلة التفاضلية لمجموعة المنحنيات الكارديوئيد المعطى بالعلاقة:

$$\boldsymbol{\rho = a(1 - cos\,\theta)} \ldots (1)$$

الحل:

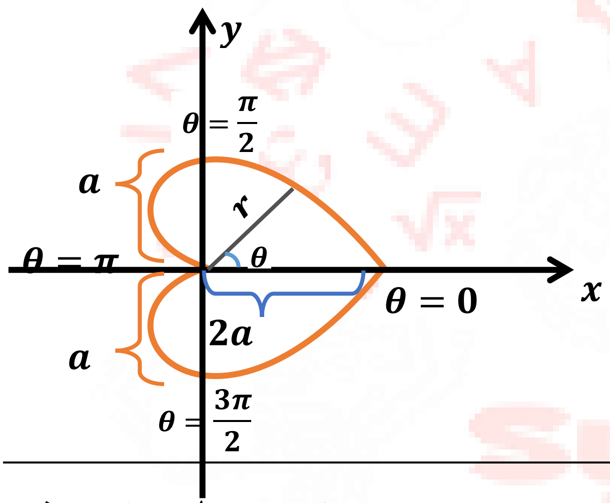
نلاحظ أن المعادلة السابقة تحوي ثابت اختياري واحد هو a لذلك نشتق مرة واحدة:

$$\Rightarrow \rho' = a.\sin\theta \Rightarrow a = \frac{\rho'}{\sin\theta}$$

نعوض في المعادلة (1):

$$\Rightarrow \rho = \frac{\rho'}{\sin\theta}(1 - \cos\theta)$$

$$\Rightarrow \rho'\left(\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) - \rho = 0$$



وهي المعادلة التفاضلية المطلوبة.

انتهت المحاضرة..

مع تحيات فريق سيريا ماث

لا تنسونا من صالح دعواتكم ^_^