التحليل 3

الدكتور : يحيى قطيش

المحاضرة : الثانية

التاريخ : ٢٠١٦/١٠/٥

إعداد : نذير تيناوي

المتسلسلة المتناوبة :

نقول عن المتسلسلة الكيفية العددية إنها متناوبة إذا كان كل حدين متجاورين مباشرة من حدودها عبارة عن عددين مختلفي الإشارة أي هي كل متسلسلة من الشكل :

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,.\,a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1}\,.\,a_n + \cdots$$

حيث $a_n \geq 0$.

اختبار ليبنتز:

إذا كان الحد العام لمتسلسلة متناوبة يسعى للصفر ومتناقص بالقيمة المطلقة عندما $n \to \infty$ تكون المتسلسلة متقاربة (و هنا نوع التقارب تقارب شرطي)

و نقول إنها **متقاربة بالإطلاق** إذا كانت متسلسلة القيمة المطلقة لحدودها متقاربة

بمعنى آخر : إذا كانت لدينا المتسلسلة المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty}((-1)^{n+1}\,.\,a_n)$ و التي تحقق الشرطان :

١- $\lim_{n\to\infty}|(-1)^{n+1}a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (أي نهاية الحد العام بالقيمة المطلقة تساوي الصفر)

٢- $a_n \geq a_{n+1}$ لأجل كل $n \in \mathbb{N}$ (أي المتتالية $\{a_n\}$ متناقصة)

عندئذٍ نقول أن هذه المتسلسلة **متقاربة شرطياً** حسب لايبنتز

و نقول عن المتسلسلة المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty}((-1)^{n+1}\,.\,a_n)$ إنها **متقاربة بإطلاق** إذا و فقط إذا تقاربت سلسلة القيم المطلقة $\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n+1}\,.\,a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

مبرهنة :

إذا كانت المتسلسلة الكيفية متقاربة بإطلاق فإنها تكون متقاربة

مثال :

لنأخذ المتسلسلة المتناوبة $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ فهي متقاربة حسب اختبار لايبنتز ذلك لأن $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ و $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ متناقصة

فهي متقاربة شرطياً إلا أن سلسلة القيم المطلقة

$$\sum\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum\frac{1}{n}$$

متباعدة (ريمانية $p = 1$) وبالتالي هي متقاربة شرطياً

مثال :

$$\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

متقاربة بإطلاق

لأن متسلسلة القيمة المطلقة لحدودها متقاربة

$$\sum \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right| = \sum \frac{1}{n^2}$$

مثال :

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \,.\sin\frac{\pi}{n}$$

نلاحظ أن نهاية الحد العام بالقيمة المطلقة:

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{n} = 0$$

و هو متناقص ذلك لأن $\cdots > \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) > \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) > \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ وبالتالي المتسلسلة متقاربة شرطياً حسب معيار لايبتنز

- إلا أنها ليست متقاربة بإطلاق ذلك لأنه

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left|(-1)^n.\sin\frac{\pi}{2}\right| = \sum_{n=2}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n}$$

و لدارسة هذه المتسلسلة نطبق معيار نهاية النسبة :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 1$$

و بما أن الناتج هو عدد موجب محدود فإن المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n}$ من نفس نوع المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\pi}{n} = \pi \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$

و هذه الأخيرة متباعدة و عليه يكون متسلسلة القيم المطلقة $\sum_{n=2}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n}$ متباعدة.

بهذا نكون راجعنا أغلب الأفكار الآنفة الذكر في مقرر التحليل ١
و الآن سنبدأ بأولى فقرات مقرر التحليل ٣و هو
الجداءات غير المنتهية.

الجداءات غير المنتهية :

لنأخذ متتالية من الأعداد الحقيقية $\{a_n\}$ ، عندئذ نسمي

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = a_1.a_2.\dots\ .a_n.\dots\dots$$

جداءً غير منتهٍ

حيث $\prod$ رمز الجداء و عندئذٍ نعرف متتالية الجداءات الجزئية بالشكل : $\{p_n\}$ حيث

$$p_1 = a_1$$
$$p_2 = a_1.a_2$$
$$p_3 = a_1.a_2.a_3$$
$$p_n = a_1.a_2.a_3.\dots.\ .a_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$$

و بالتعريف لدينا أنه :إذا كانت نهاية متتالية الجداءات الجزئية موجودة و محدودة عندما $n \to \infty$ و ليكن :

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p \in \mathbb{R}^*$$

يكون الجداء غير المنتهي متقارب و تكون قيمته تساوي هذه القيمة p أي :

$$\exists\, p \in \mathbb{R}^* : \lim_{n\to\infty} p_n = p \Leftrightarrow \prod_{n=1}^{\infty} p_n = p$$

و زيادةً في التوضيح :

- نقول عن $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ أنه متقارب إذا كان :

$$\leftarrow \quad \lim_{n\to\infty} p_n = p \quad , \quad p \neq \pm\infty \quad , \quad p \neq 0$$

- نقول أن $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ أنه متباعد إذا كان :

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} p_n = 0 \\ \lim_{n\to\infty} p_n = \pm\infty \quad \text{أو} \\ \text{أو غير موجودة} \end{cases}$$

من الواضح أنه يكفي أن يكون أحد المضاريب ... $a_1.a_2.a_3$ صفراً كي تكون قيمة الجداء $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ مساوية للصفر

مثال :

ادرس الجداء التالي وأوجد قيمته في حال تقاربه

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

الحل:

بدايةً لنشكل متتالية الجداءات الجزئية و التي حدها العام:

$$p_n=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)$$

$$=\prod_{n=2}^{\infty}\left[\frac{(k-1)}{k}\cdot\frac{(k+1)}{k}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdots\cdots\frac{(n-1)}{n}\cdot\frac{(n+1)}{n}$$

بالاختصار نجد أن :

$$p_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{1}{2}$$

وبالتالي هو متقارب و قيمته :

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$$

ملاحظة هامة:

سنفترض أن $a_n\neq 0$ من أجل كل قيمة لـ n وذلك اعتباراً من الآن وحتى نهاية الفقرة المتعلقة بالجداءات غير المنتهية.

وبالإضافة إلى ذلك فإن القول "ادرس الجداء" يعني بيّن فيما إذا كان هذا الجداء متقارباً أم متباعداً ولماذا؟

مثال: ادرس الجداء الآتي وأوجد قيمته في حالة تقاربه

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+x^{2^n}\right)\ :|x|<1$$

بداية لنشكل متتالية المجاميع الجزئية و التي حدها العام :

$$p_n=\prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right)=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\dots\left(1+x^{2^n}\right)$$

و الآن و بهدف تبسيط الحد العام من أجل التمكن من حساب نهايته بسهولة لنضرب الطرفين بالمقدار $(1-x)\neq 0$

$$(1-x)p_n=\underbrace{(1-x)(1+x)}_{(1-x^2)}(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\dots\left(1+x^{2^n}\right)$$

$$(1-x)p_n=\underbrace{(1-x^2)(1+x^2)}_{(1-x^4)}(1+x^4)\dots\left(1+x^{2^n}\right)$$

$$(1-x)p_n=(1-x^4)(1+x^4)(1+x^8)\dots\left(1+x^{2^n}\right)$$

$$=\left(1-x^{2^n}\right)\left(1+x^{2^n}\right)=1^2-\left(x^{2^n}\right)^2=1-x^{2.2^n}=1-x^{2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow p_n=\frac{\left(1-x^{2^{n+1}}\right)}{1-x}$$

بأخذ نهاية p_n و بملاحظة أن $\lim_{n\to\infty}x^{2^{n+1}}=0$ لأن $|x|<1$ نستنتج أن:

$$\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{1}{1-x}$$

أي أن الجداء متقارب وقيمته: $\boxed{p=\frac{1}{1-x}}$

الخواص الأساسية للجداءات غير المنتهية:

ليكن لدينا الجداء $\prod_{n=1}^{\infty}a_n$ و سنكتبه على شكل جدائين كما يلي :

$$\prod_{n=1}^{\infty}a_n=\prod_{k=1}^{n}a_k.\prod_{k=n+1}^{\infty}a_k=p_n.\pi_n$$

حيث: π_n الباقي النوني للجداء غير المنتهي

p_n الحد العام لمتتالية الجداءات الجزئية

مبرهنة(١):

إذا كان الحد العام لمتتالية الجداءات الجزئية هو $p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$ فإن الشرط اللازم و الكافي لتقارب الجداء غير المنتهي $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ هو تقارب الباقي النوني $\pi_n = \prod_{k=n+1}^{\infty} a_k$ أياً كان العدد الطبيعي n

مبرهنة(٢):

إذا كان الجداء غير المنتهي $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ متقارب فإن الباقي النوني $\pi_n = \prod_{k=n+1}^{\infty} a_k$ يحقق الشرط:

$$\lim_{n\to\infty} \pi_n = 1$$

الإثبات:

لما كان الجداء $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ متقارباً فهذا يعني أنه يوجد $p \in \mathbb{R}^*$ بحيث $p = \prod_{n=1}^{\infty} a_n$ و تحديداً هو نهاية متتالية الجداءات الجزئية $\{p_n\}$ $(\lim_{n\to\infty} p_n = p)$ ، و وجدنا قبل قليل أن

$$p = \prod_{n=1}^{\infty} a_n = p_n.\pi_n \quad \Rightarrow \quad \pi_n = \frac{p}{p_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \pi_n = \lim_{n\to\infty} \frac{p}{p_n} = \frac{p}{p} = 1$$

و هو المطلوب ☺

مبرهنة(٣):

إذا كان الجداء غير المنتهي $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ متقارب فإن: $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

الإثبات: بما أن $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ فهذا يعني أن متتالية مجاميعه الجزئية متقاربة من عدد و ليكن p و عليه يمكن ملاحظة أن :

$$p_n = a_1.a_2 \ldots\ldots a_n \quad \& \lim_{n\to\infty} p_n = p$$

$$p_{n-1} = a_1.a_2 \ldots a_{n-1} \quad \& \lim_{n\to\infty} p_{n-1} = p$$

و أخيراً بقسمة p_n على p_{n-1} نجد أن :

$$a_n = \frac{p_n}{p_{n-1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{p}{p} = 1$$

(صحيحة إذا كان الجداء متقارب)

ملاحظة: إن الشرط $a_n \to 1$ هو شرط لازم لتقارب الجداء $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ ولكنه غير كافٍ للتقارب بملاحظة المثال الآتي:

لنأخذ الجداء $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}$ فنلاحظ أن $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ إلا أننا سنثبت أنه **متباعد** باستخدام متتالية الجداءات الجزئية كما يلي :

$$p_n = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{k} = \frac{2}{1}.\frac{3}{2}.\frac{4}{3}\dots.\frac{n}{n-1}.\frac{n+1}{n} = (n+1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

فالجداء متباعد بالرغم من كون حده العام يسعى إلى الصفر و هذا المثال المعاكس كافٍ لإثبات أن عكس المبرهنة السابقة غير صحيح بالضرورة.

"انتهت المحاضرة"

نذير تيناوي

Syria Math