التحليل 3

الدكتور : يحيى قطيش

المحاضرة : الخامسة

التاريخ : ٢٨/١٠/٢٠١٦

مبرهنة(٢):

لتكن لدينا متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ مستمرة ومعرفة على المجال المغلق $I=[a,b]$ حيث $-\infty<a<b<+\infty$ وبفرض أن هذه المتتالية متقاربة بانتظام على I من تابع النهاية $f(x)$ عندئذٍ التابع $f(x)$ قابل للمكاملة على I ويحقق العلاقة:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

الإثبات:

بما أن التوابع $f_n(x)$ في المتتالية مستمرة على $[a,b]$ و المتتالية $\{f_n(x)\}$ متقاربة بانتظام من التابع $f(x)$ يكون التابع $f(x)$ مستمراً و بالتالي قابل للمكاملة على $[a,b]$ و لدينا :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$$

نأخذ $\varepsilon>0$ و بالتالي $\frac{\varepsilon}{b-a}>0$

يوجد عدد طبيعي $N_0\neq 0$ بحيث يكون:

$$\left|\underbrace{\int_a^b f_n(x)dx}_{\text{الحد العام}}-\underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{\text{النهاية}}\right|=\left|\int_a^b [f_n(x)dx-f(x)]dx\right|$$

$$\leq\int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx<\int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx=\varepsilon$$

حيث $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$ تكون المتتالية متقاربة بانتظام

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

ملاحظة: شرط التقارب المنتظم لمتتالية التوابع في هذه المبرهنة هو شرط كافٍ ولكنه غير لازم والمثال الآتي يوضح ذلك:

مثال: لتكن $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ متتالية توابع معرفة على المجال $I = [0,1]$

الحل: نجد أن تابع النهاية:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0$$

أي المتتالية متقاربة نقطياً من الدالة الصفرية.

هل المتتالية متقاربة بانتظام؟

لنفرض أنها متقاربة بانتظام.

نفرض أن $\varepsilon = \frac{1}{2}$ أي يوجد عدد طبيعي $N \neq 0$ بحيث يكون:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\right| < \varepsilon = \frac{1}{2}$$

$$\frac{nx}{1+n^2x^2} < \frac{1}{2} \quad ; \quad n \geq N \quad \forall\, x \in I = [0,1]$$

ومنه بفرض $n > N$ فإنه يكون $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < 1$

نأخذ $x = \frac{1}{n}$ بالتعويض نجد أن:

$$\frac{n.\frac{1}{n}}{1+n^2.\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$$

هذا مستحيل أي الفرض الذي فرضناه خاطئ وبالتالي المتتالية متقاربة نقطياً على $[0,1]$.

فنجد أنه اختل التقارب المنتظم رغم أنه:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\ln(1+n^2x^2)}{2n}\right] = 0$$

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 0\ dx = 0$$

النهايتين متساويتين رغم أن التقارب غير منتظم.

مبرهنة(٣)

لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع معرفة على $[a,b]$ لنفرض أنها متقاربة نقطياً على $[a,b]$ من $f(x)$ ونفرض أن حدودها توابع قابلة للاشتقاق على $[a,b]$ بالنسبة لـ x وأن المشتقات $f_n'(x)$ لحدودها هي توابع مستمرة على $[a,b]$ وبفرض $\{f_n'(x)\}$ متقاربة بانتظام على $[a,b]$ من التابع $g(x)$ عندئذٍ يكون التابع $f(x)$ قابلاً للاشتقاق على $[a,b]$ ومشتقه هو $g(x)$ ويتحقق:

$$\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right]' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x) = g(x)$$

الإثبات:

نجد أن $g(x)$ تابع مستمر حسب المبرهنة(١) فهو قابل للمكاملة

نفرض $G(x)$ التابع الأصلي لـ $g(x)$ $\quad \forall\ x \in I$

$$G(x) - g(a) = [g(t)]_a^x = \int_a^x g(t)dt$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)dt = \lim_{n\to\infty} [f_n(t)]_a^x$$

$$= \lim_{n\to\infty} f_n(x) - \lim_{n\to\infty} f_n(a)$$

$$G(x) - G(a) = f(x) - f(a)$$

$$f(x) = G(x) - G(a) + f(a)$$

ومنه يكون $f(x)$ قابلاً للاشتقاق في كل نقطة من نقاط I ومشتقه هو

$$f'(x) = G'(x) = g(x)$$

وتتحقق العلاقة المذكورة في النص وبذلك يتم إثبات المطلوب.

مبرهنة(٤):

لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع مستمرة على مجال I ولنفرض أن:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

عندئذٍ تكون القضيتين الآتيتين متكافئتين:

١) المتتالية $\{f_n(x)\}$ متقاربة بانتظام من الدالة $f(x)$ على I

٢) $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$ حيث $M_n = \sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)|$

أي أن الشرط اللازم والكافي لكي تكون المتتالية متقاربة بانتظام هو أن تكون هذه النهاية تساوي الصفر أي أن تكون نهاية الـ sup للفرق بين $f_n(x)$ و $f(x)$ من أجل كل قيمة x من I تساوي الصفر.

تذكرة: الـ supremum هو أصغر حد أعلى (الحد الأعلى الأصغري).

نقول عن $b \in \mathbb{R}$ أنه أعلى حد أصغري للمجموعة A إذا تحقق الشرطان:

$$1)\ \forall x \in A \Rightarrow x \le b$$

$$2)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists z \in A\ ; z > b - \varepsilon$$

مثال:

$$f_n(x) = \frac{1}{nx+1} \qquad I = [0, \infty[$$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nx+1} = 0$$

فهي متقاربة نقطياً من التابع الصفري $f(x) = 0$

إذا كان الشرط $x \in [0,\infty[\ ;\ \lim_{n\to\infty} \sup|f_n(x) - f(x)| = 0$ محقق تكون عندها المتتالية متقاربة بانتظام حسب المبرهنة(٤) والآن لنرى إذا كان الشرط محقق أم لا.

$$\lim_{n\to\infty} \sup|f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup\left|\frac{1}{nx+1}\right| = 1 \neq 0$$

وبالتالي المتتالية غير متقاربة بانتظام لأن:

$$\lim_{n\to\infty} \sup|f_n(x) - f(x)| \neq 0$$

مبرهنة(٥): (اختبار كوشي):

متى تكون المتتالية متقاربة بانتظام حسب اختبار كوشي (المتتالية كوشية) ؟

تكون متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ المعرفة على المجال I متقاربة بانتظام من التابع $f(x)$ على I إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

مهما كان $\varepsilon > 0$ يوجد $N_0 \neq 0$ بحيث $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ لأجل $n > m > N_0$, $\forall x \in I$

مثال: المتتالية $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ ، $I = [0,1]$

أثبت أنها متقاربة بانتظام على I

$\forall \varepsilon > 0$ يوجد $N > \frac{2}{\varepsilon}$ بحيث يكون:

$$|f_n(x) - f_m(x)| = \left|\frac{x^n}{n} - \frac{x^m}{m}\right| \leq \left|\frac{x^n}{n}\right| + \left|\frac{x^m}{m}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{1}{N} + \frac{1}{N} = \frac{2}{N} < \varepsilon$$

$$\frac{2}{N} < \varepsilon \Rightarrow N > \frac{2}{\varepsilon}$$

فحسب المبرهنة الأخيرة تكون متقاربة بانتظام

تمرين: بين فيما إذا كان تقارب المتتالية التالية منتظماً أم غير منتظم مع التبرير !

$$\{f_n(x)\} \quad : f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2} \quad : x \in [0,1]$$

الحل:

بداية نلاحظ أن :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

كما أننا نلاحظ أن التوابع $f_n(x)$ تعطى تفصيلاً بالشكل :

$$f_n(x)=\begin{cases}0 & : x=0\\ \dfrac{1}{2n} & : x=\dfrac{1}{n}\\ \dfrac{1}{1+n^2} & : x=1\end{cases}$$

و لنثبت أن $f_n(x)\le\frac{1}{2n}$ عندها يكون $supf_n(x)=\frac{1}{2n}$

و لإثبات ذلك نكتب :

$$0\le(1-n)^2=1-2n+n^2\Rightarrow 2n\le 1+n^2$$

نقلب طرفي المتراجحة :

$$0\le\frac{1}{1+n^2}\le\frac{1}{2n}$$

فنلاحظ أن $f(x)\le\frac{1}{2n}$ لكل x من I و بالتالي :

$$\sup_{x\in I} f_n(x)=\frac{1}{2n}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0$$

فالتقارب منتظم ☺

سأورد –إن شاء الله- ملحق يحوي حل تمارين مختلفة عن البحث السابق ☺

"انتهت المحاضرة"

نذير تيناوي