Syria Math

المعادلات التفاضلية ١

الأستاذ: عبد الله المليح

المحاضرة : الثالثة

التاريخ : ٢٠١٦/١٠/٢٣

إعداد : محمد شهلا + فادي الشريطي

مرحبا أصدقائي سوف نكمل معكم بمقرر معادلات تفاضلية (١) "عملي" وفي هذه المحاضرة لقد قام الاستاذ بحل بعض تمارين الوظيفة والآن لنبدأ:

معادلات تفاضلية من المرتبة الأولى محلولة بالنسبة للمشتق ترد إلى متجانسة:

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

$$D_1 : a_1x + b_1y + c_1$$
$$D_2 : a_2x + b_2y + c_2$$

حيث كل من معادلتي D1,D2 هي معادلة مستقيم.

١_ الحالة الأولى:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \varphi$$ المستقيمين منطبقين

$$y' = f(\varphi) \xrightarrow{\text{الطرفين بالوسطين}} dy = f(\varphi)dx \overset{\text{نكامل}}{\Longrightarrow} y = F(\varphi)x + c$$

٢_ الحالة الثانية:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$ المستقيمين متوازيين

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{(\varphi(a_1x + b_1y) + c_2)}\right)$$

$$z = a_1x + b_1y \overset{\text{نشتق}}{\Longrightarrow} z' = a_1 + b_1y'$$

٣_ الحالة الثالثة:

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$ المستقيمان متقاطعان

الحل: نوجد نقطة $M(x_0, y_0)$ وذلك بحل معادلتي المستقيمين حل مشترك

ثم نضع $x = X + x_0 \,, y = Y + y_0$

$$\overset{'}{\Rightarrow} dx = dX \,, dy = \mathrm{d}Y \Rightarrow \mathrm{y}' = \mathrm{Y}'$$

$$f\left(\frac{\alpha_1 X + \beta_1 Y}{\alpha_2 X + \beta_2 Y}\right)$$

مثال: أوجد حل المعادلة $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$

$$y' = \frac{y - 2x - 1}{2y - x - 1} \xrightarrow[\text{نلاحظ}]{} \frac{1}{2} \neq \frac{-2}{-1}$$

وبالتالي المستقيمان متقاطعان

$$y - 2x - 1 = 0 \ldots\ldots(1)$$
$$2y - x - 1 = 0 \ldots\ldots(2)$$

بحل (١) و(٢) نجد نقطة القاطع $M_0\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

نضع $x = X - \frac{1}{3} \quad , y = Y + \frac{1}{3}$

$$\xRightarrow{\text{بالاشتقاق}} dx = dX$$
$$and \quad dy = dY$$

$$Y' = \frac{\left(Y + \frac{1}{3}\right) - 2\left(X - \frac{1}{3}\right) - 1}{2\left(Y + \frac{1}{3}\right) - \left(X - \frac{1}{3}\right)} = \frac{Y - 2X}{2Y - X} = \frac{\frac{Y}{X} - 2}{\frac{2Y}{X} - 1}$$

$$we\ put\ Z = \frac{Y}{X} \xRightarrow{\text{بالاشتقاق}} Y' = Z + xZ'$$

$$xZ' = \frac{Z - 2 - 2Z^2 + Z}{2Z - 1} \xRightarrow{\text{نجد بالاصلاح}} \frac{dx}{x} = dz \frac{2Z - 1}{-2Z^2 + 2Z - 2}$$

$$\xRightarrow{\text{بالمكاملة}} -\frac{1}{2}\ln|-2Z^2 + 2Z - 2| = \ln|cx|$$

$$\frac{1}{\sqrt{-2Z^2 + 2Z - 2}} = cx$$

$$Z=\frac{Y}{X}=\frac{y-\frac{1}{3}}{x+\frac{1}{3}}$$ ولا ننسى أن نضع

تمرين آخر: أوجد حل المعادلة $(x-y+1)^2\,y'=(x-y-2)^2$

الحل:

$$y'=\left(\frac{x-y-2}{x-y+1}\right)^2 \quad\to \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$$

ومنه فهي معادلة متجانسة والمستقيمان متوازيان

لنضع $x-y=Z$

$$Z'=1-y'$$

$$1-Z'=\left(\frac{Z-2}{Z+1}\right)^2$$

$$Z'=1-\left(\frac{Z-2}{Z+1}\right)^2$$

$$Z'=\frac{(Z+1)^2-(Z-2)^2}{(Z+1)^2}=\frac{3(2Z-1)}{(Z+1)^2}$$

$$\frac{(Z+1)^2}{3(2Z-1)}dZ=dx$$

وهنا تحل بقسمة البسط على المقام والمكاملة ....

المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى محلولة بالنسبة للمشتق(الخطية):

تذكرة

دالة خطية في x (أي من الدرجة الأولى للمتغير x) $y=ax+b$

غير خطية $y = x^2 + 2x - 3$

غير خطية $y = \sin(x)$

تحل المعادلة التفاضلية الخطية من الشكل

$$y' + p(x)y = q(x)$$

على خطوتين ....

الخطوة الأولى بدون طرف ثان $\boldsymbol{y' + p(x)y = 0}$

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{y}} = -\mathrm{p(x)dx}$$

$$\boldsymbol{ln}(\mathrm{y}) = -\int \mathrm{p(x)dx} + \ln(\mathrm{c})$$

$$\boldsymbol{y_H = e^{-\int p(x)dx + lnc}}$$

$$\boldsymbol{y_H = ce^{-\int p(x)dx}}$$

الخطوة الثانية نوجد الحل مع طرف ثان وذلك بوضع c=c(x)

$$y_0 = c(x)e^{-\int p(x)dx}$$

نشتق ونعوض ونوجد c(x) ونعوض في المعادلة الأصلية مع q(x)

$$y = y_H + y_0$$

مثال : $\mathrm{x^3y' + 3x^2y} = -\sin(x)$

الحل: هي معادلة خطية لأن y', y من الدرجة الأولى وليسا مضروبين ببعضهما

الخطوة الأولى : (حل بدون طرف ثان)

$$y' + \frac{3y}{x} = -\frac{\sin(x)}{x^3} \qquad (\text{نقسم على } x^3)$$

$$y' + \frac{3}{x}y = 0 \qquad (\text{نوجد الحل العام بدون طرف ثاني})$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{3}{x}\,dx$$

بالتكامل نحصل على $\ln|y| = -3\ln|x| + \ln|c|$

$$\ln|y| = \ln\left|\frac{c}{x^3}\right| \to y = \frac{c}{x^3}$$

الخطوة الثانية: نضع c=c(x)

$$y = \frac{c(x)}{x^3}$$

$$y' = \frac{c'(x)x^3 - 3x^2\, c(x)}{x^6}$$

نقسم البسط والمقام على x^2

$$y' = \frac{c'(x)x - 3c(x)}{x^4}$$

نعوض في المعادلة الأصلية

$$\frac{c'(x)x - 3c(x)}{x^4} + \frac{3c(x)}{x^4} = -\frac{\sin(x)}{x^3}$$

$$\frac{c'(x)}{x^3} = -\frac{\sin(x)}{x^3}$$

$$c'(x) = -\sin(x) \overset{\int}{\Longrightarrow} c(x) = \cos(x)$$

$$y_0 = \frac{\cos(x)}{x^3} \Rightarrow y = \frac{\cos(x) + c}{x^3}$$

وهو المطلوب ....

"انتهت المحاضرة"