البنى الجبرية 1

الدكتور: حمزة الحاكمي

المحاضرة: الثالثة

التاريخ: ٣/١٠/٢٠١٦

إعداد: أحمد أبو التوت

Web: www.syriamath.net group: Improve our mathematics

بدأت المحاضرة بمبرهنة تعتمد على ما سبق حيث ذكر بكل ما سبق بشكل سريع ثم انتقل الدكتور لفقرة جديدة وهي علاقات الترتيب كتعاريف وأمثلة ومبرهنات وأخيرا لتعريف العنصر الأصغر والأكبر والعنصر الأصغري والأعظمي مع عدة وظائف سيتم حلها في المحاضرة هذه .

لنبدأ الان ☺

مبرهنة :

لتكن P مجموعة غير خالية ولنفرض أن l مجموعة كل التجزئات المعرفة على P

و l_0 مجموعة كل علاقات التكافؤ المعرفة على P عندئذ : يوجد تطبيق متباين وغامر (تقابل) بين l و l_0 و ليكن $f : l \to l_0$

البرهان :

لنعرف العلاقة بالشكل : $f : l \to l_0$

$$\forall \Sigma \in l : f(\Sigma) = \mathcal{P}_\Sigma$$

ولما كان $\mathcal{P}_\Sigma$ علاقة تكافؤ على P فإن $\mathcal{P}_\Sigma \in l_0$

f تطبيق لأن :

$$\forall \Sigma , \theta \in l : \theta = \Sigma \implies \mathcal{P}_\theta = \mathcal{P}_\Sigma$$

$$\implies f(\Sigma) = f(\theta)$$

f تطبيق متباين لأن :

$$f(\Sigma) = f(\theta) \implies \mathcal{P}_\theta = \mathcal{P}_\Sigma$$

$$\implies \Sigma = {}^{P}/_{\mathcal{P}_\Sigma} = {}^{P}/_{\mathcal{P}_\theta} = \theta$$

f تطبيق غامر لأنه :

$\mathcal{P} \in l_0$ فإن $\mathcal{P}$ علاقة تكافؤ على P .

عندئذ فإن مجموعة الخارج ${}^{P}/_{\mathcal{P}}$ تشكل تجزئة للمجموعة P وبالتالي ${}^{P}/_{\mathcal{P}} \in l$ أي أنّ :

$$\Rightarrow f\left({}^{P}/_{\mathcal{P}}\right) = \mathcal{P}_{P/_{\mathcal{P}}} = \mathcal{P}$$

ومنه f تقابل و هو المطلوب .

علاقات الترتيب

تعريف : لتكن P مجموعة غير خالية و $\mathcal{P}$ علاقة معرفة على P نقول عن العلاقة $\mathcal{P}$ أنها علاقة ترتيب على المجموعة P إذا كانت العلاقة $\mathcal{P}$ ((انعكاسية – تخالفيه –متعدية))ويرمز عادة لعلاقة الترتيب بالرمز $\leq$.

اذا كانت $\leq$ علاقة ترتيب على المجموعة P نسمي الثنائية $(P,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً .

$$\forall\, a,b \in P : a \leq b \;\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a < b \end{cases}$$

مثال :

مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ مع علاقة $\leq$ المعرفة على الأعداد هي علاقة تعريف ، نسمي هذه العلاقة (الترتيب المألوف).

$$0 < 1 < 2 < \cdots$$

حيث نلاحظ أنه :

$$\forall\, x \in \mathbb{N} \,; x = x \;\Leftrightarrow\; x \leq x$$

وبالتالي هي انعكاسية:

$$\forall\, x,y \in \mathbb{N} \,; x \leq y \,\wedge y \leq x \;\Leftrightarrow\; y = x$$

وبالتالي هي تخالفية

$$\forall\, x,y,z \in \mathbb{N} \,; x \leq y \,\wedge\, y \leq z \;\Leftrightarrow\; x \leq z$$

وبالتالي هي متعدية

مثال :

مجموعة الأعداد الصحيحة $(\mathbb{Z},\leq)$ بالنسبة للعلاقة $\leq$ المألوفة هي مجموعة مرتبة جزئية .

$$\ldots < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < \cdots$$

مثال :

لتكن P مجموعة غير خالية ولتكن Σ أسرة من المجموعات الجزئية في P

$$\forall A, B \in \Sigma;\ A \subseteq B \iff \forall a \in A; a \in B$$

$$A \subseteq B \iff \begin{cases} A \subsetneq B \\ A = B \end{cases}$$

أي أن $(\Sigma,\subseteq)$ مجموعة مرتبة جزئياً لأن: .

$$\forall A \in \Sigma\ ; A = A \implies A \subseteq A$$

وبالتالي هي انعكاسية

$$\forall A, B \in \Sigma\ ; A \subseteq B\ \land B \subseteq A \iff A = B$$

وبالتالي هي تخالفية

$$\forall A, B, D \in \Sigma\ ; A \subseteq B\ \land B \subseteq D \iff A \subseteq D$$

وبالتالي هي متعدية .

ملاحظة : أي أسرة من المجموعات الجزئية لمجموعة ما تشكل مجموعة مرتبة جزئيا بالنسبة لعلاقة الاحتواء .

مبرهنة :

لتكن P مجموعة غير خالية ولتكن $\leq$ علاقة انعكاسية ومتعدية معرفة على P عندئذ :

١) العلاقة $\mathcal{P}$ المعرفة على P بالشكل الاتي :

$$\forall a, b \in P:\ a\mathcal{P}b \iff a \leq b \land b \leq a$$

هي علاقة تكافؤ على P .

٢) العلاقة $(\leq)$ المعرفة على مجموعة الخارج $P/_{\mathcal{P}}$ بالشكل الاتي :

$$\forall\, \bar{a}, \bar{b} \in {}^{P}/_{\mathcal{P}}\ ;\ \bar{a} \le \bar{b} \Leftrightarrow a \le b$$

هي علاقة ترتيب على ${}^{P}/_{\mathcal{P}}$.

البرهان :

١) نثبت أن العلاقة $\mathcal{P}$ هي علاقة تكافؤ على P ((وظيفة)) :

كي يكون $\mathcal{P}$ علاقة تكافؤ لنثبت أنها تناظرية لأنها انعكاسية ومتعدية فرضاً :

$$\forall a, b \in P : a\mathcal{P}b \Leftrightarrow a \le b \wedge b \le a \Leftrightarrow b\mathcal{P}a$$

٢) لنبرهن أولاً أن العلاقة $\le$ مستقلة عن اختيار الممثلين لصفوف التكافؤ (أي لنثبت أنها معرفة جيداً)

لنأخذ $\forall\, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} \in {}^{P}/_{\mathcal{P}}$

ولنفرض أن $\bar{a} = \bar{b}$ و $\bar{c} = \bar{d}$

ولنفرض أيضاً أن $\bar{a} \le \bar{c}$ ولنبرهن على أن $\bar{b} \le \bar{d}$.

لما كان $\bar{a} = \bar{b}$: عندئذ $a \in \bar{a} = \bar{b}$ ومنه $a\mathcal{P}b$

وحسب الفرض $a \le b \wedge \boldsymbol{b \le a}$

ولما كان $\bar{c} = \bar{d}$: عندئذ $c \in \bar{c} = \bar{d}$ ومنه $c\mathcal{P}d$

وحسب الفرض $\boldsymbol{c \le d} \wedge \boldsymbol{d \le c}$

ونعلم أن $\boldsymbol{\bar{a} \le \bar{c}}$ (فرضاً) ....وحسب الفرض يكون $\boldsymbol{a \le c}$

أصبح لدينا ما يلي :

$$\begin{cases} \boldsymbol{b \le a} \\ \boldsymbol{a \le c} \end{cases} \Rightarrow \boxed{b \le c}$$

ولدينا $\boxed{c \le d}$ ومنه $b \le d$ وحسب لفرض نجد $\bar{b} \le \bar{d}$.

ومنه أن العلاقة $\le$ معرفة جيدً .

وظيفة : (أنثبت أن العلاقة $\le$ المعرفة على ${}^{P}/_{\mathcal{P}}$ هي علاقة ترتيب).

البرهان :

إن العلاقة $\le$ هي علاقة انعكاسية ومتعدية وبقي ان نثبت انها تخالفية

ليكن $\bar{a}, \bar{b} \in {}^{P}/_{\mathcal{P}}$ ولنفرض أن $(\bar{a} \le \bar{b}) \wedge (\bar{b} \le \bar{a})$ وحسب تعريف $\le$

$$a \le b \wedge b \le a \underbrace{\Rightarrow}_{\mathcal{P}\text{حسب}} a\mathcal{P}b \Rightarrow a \in \bar{b} \Rightarrow \bar{a} = \bar{b}$$

وهكذا يتم المطلوب .

تعريف :

ليكن $(P, \le)$ مجموعة مرتبة جزئياً:

١) نقول عن العنصر $a \in P$ إنه عنصر **أصغر** في المجموعة P إذا حقق :

$$\forall x \in P\ ;\ a \le x$$

٢) نقول عن العنصر $b \in P$ إنه عنصر **أصغري** في المجموعة P إذا حقق :

$$\forall y \in P\ ;\ y \le b \Rightarrow y = b$$

٣) نقول عن العنصر $a \in P$ أنه عنصر **أكبر** في المجموعة P إذا حقق :

$$\forall x \in P : x \le a$$

٤) نقول عن العنصر $b \in P$ أنه عنصر **أعظمي** في المجموعة P إذا حقق :

$$\forall y \in P\ , b \le y \Rightarrow b = y$$

و ليس من الضروري أن تتواجد كل هذه العناصر في مجموعة مرتبة ما .

مثال :

١) في مجموعة الأعداد الطبيعية N إن الصفر عنصر أصغر وأصغري في آنٍ واحد ولا تحوي عنصر أكبر ولا أعظمي .

$$\forall x \in N\ ;\quad 0 \le x$$

٢) في مجموعة الأعداد الصحيحة Z حيث

$$\dots\dots < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < \cdots$$

لا يوجد عنصر أصغر ولا أكبر ولا أصغري ولا أعظمي .

و لكن لنعرف على Z علاقة ترتيب جديدة بالشكل:

$$0 < 1 < 2 < \cdots < -1 < -2 < -3 < \cdots$$

العلاقة $\le$ المعرفة على Z في هذه الحالة تحوي عنصر أصغر هو الصفر وهو أيضا اصغري .

مثال :

لتكن $A = \{ a, b, c, e\}$ مجموعة ما و لنأخذ المجموعة $B = \{ \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, e\}\}$

وجدنا ان $(B, \subseteq)$ هي مجموعة مرتبة جزئيا .

إن $\{a\}$ ليس عنصر أصغر في B لأنه يوجد $\{b\} \epsilon B$ و $\{b\} \not\subset \{a\}$ وأيضاً العنصر $\{b\}$ ليس أصغر في B لنفس السبب.

إن $\{a\}$ عنصر أصغري في B وأيضا العنصر $\{b\}$ أصغري في B ذلك لأنه كل عنصر محتوى فيه يساويه (يحقق التعريف).

إن $\{a, b\}$ عنصر ليس أصغرياً في B لأنه $\{a\} \epsilon B$ وان $\{a\} \underset{\neq}{\subseteq} \{a, b\}$.

إن $\{a, b, e\}$عنصر أعظمي في B وأيضاً هو عنصر أكبر في B لأن

$$\{a\} \subset \{a, b, e\}$$

$$\{b\} \subset \{a, b, e\}$$

$$\{a, b\} \subset \{a, b, e\}$$

تمهيدية : (وظيفة).

لتكن $(P, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئيا عندئذ :

- كل عنصر أصغر (أكبر)في حال وجوده يكون وحيداً .
- كل عنصر أصغر (أكبر)في حال وجوده يكون عنصر أصغري (أعظمي) .

البرهان :

١) ليكن $a, b \epsilon P$ وكل منهما عنصر أصغر في P وبما أن :

$$\forall x \epsilon P \quad ; \; a \leq x$$

ولأن الاخيرة محققة من اجل جميع قيم x فهي محققة من أجل $\boxed{a \leq b}$

وأيضا لدينا

$$\forall y \epsilon P \quad \Rightarrow b \leq y$$

لان الاخيرة محققة من اجل جميع قيم y فهي محققة من أجل $\boxed{b \leq a}$

وبالتالي - وكون العلاقة $\leq$ هي علاقة ترتيب - فهي تخالفية ومنه $\boxed{b = a}$

ومنه العنصر الأصغر هو وحيد .

و بشكل مماثل تماماً يمكن إثبات وحدانية العنصر الأكبر فقط باعتماد تعريفه .

٢) ليكن $a \in P$ عنصر أصغر في P :

هذا يعني انه وحسب التعريف

$$\forall x \in P \quad ; a \leq x \ldots \ldots \ldots \ldots (*)$$

ولنفرض أن b عنصر اصغري في P :

وهذا يعني انه وحسب التعريف

$$\forall y \in P \; ; y \leq b \Longrightarrow y = b \ldots \ldots . . \quad (**)$$

ولكن $(*)$ محققة من أجل جميع قيم x من P وبفرض أن $x = b$ وبالاستفادة من $(**)$ نجد ان $a = b$

ومنه العنصر الاصغر يكون عنصر أصغري

وبطريقة مماثلة تقريباً يتحقق المطلوب من أجل العنصر الأكبر .

" انتهت المحاضرة "