التحليل 3

الدكتور : يحيى قطيش

المحاضرة : الثالثة

التاريخ : ٢٠١٦/١٠/١١

إعداد : نذير تيناوي

مبرهنة:

من المناسب أحياناً كتابة a_n بالشكل $a_n = 1 + b_n$ فيأخذ الجداء غير المنتهي(المدروس) الشكل $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + b_n)$ ويكون الشرط اللازم للتقارب هو $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

مبرهنة:

الشرط اللازم والكافي لتقارب الجداء $a_n > 0$: $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ هو تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$ وعند تحقق هذا الشرط فإنه يكون $p = e^s$ بحيث s هو مجموع المتسلسلة و p قيمة هذا الجداء

الإثبات:

نشكل متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$ حيث أن حدها العام :

$$s_n = \sum_{k=1}^{\infty} \ln a_k = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n)$$

و حسب خواص اللوغاريتم ($\ln(x) + \ln(y) = \ln(xy)$) يكون :

$$s_n = \ln(a_1 . a_2 \ldots a_n) = \ln(\prod_{k=1}^{n} a_k)$$

$$\Longrightarrow s_n = \ln p_n \Rightarrow p_n = e^{s_n}$$

و ذلك علماً أن التابعين الأسي واللوغاريتمي مستمرين و الآن :

١) إذا كان الجداء متقارب $\lim_{n\to\infty} p_n = p > 0$ فإن المتسلسلة متقاربة
$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \ln p_n = \ln p$$

٢) إذا كانت $\lim_{n\to\infty} s_n = s \Leftarrow \lim_{n\to\infty} p_n = e^s$

أي تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$ يؤدي إلى تقارب الجداء $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ و العكس بالعكس

شكل آخر للمبرهنة:

تقارب الجداء غير المنتهي $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + b_n)$ يلزم ويكفي لأن تتقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + b_n)$ وعندها إذا كان مجموع المتسلسلة هو s فإن قيمة الجداء هي e^s أي $p = e^s$

مبرهنة:

إذا تحققت المتراجحة $(b_n > 0)$ أو $(b_n < 0)$ على الأقل من أجل قيم كبيرة للعدد الطبيعي n فإن الشرط اللازم والكافي لتقارب الجداء $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + b_n)$ هو تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

الإثبات:

إذا كان $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + b_n)$ متقارب فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + b_n)$ و $\mathrm{Lim}_{n\to\infty} b_n = 0$

(حسب المبرهنة السابقة) و لنشكل النهاية:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+b_n)}{b_n}=1 \quad : \quad \left(\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1\right)$$

و حسب قاعدة المقارنة لمتسلسلتين من نوع واحد يكون لدينا المتسلسلة $\sum b_n$ متقاربة مثل المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+b_n)$

وبالعكس تتحقق كفاية الشرط أي إذا كانت $\sum b_n$ متقاربة فإن:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+b_n)}{b_n}=1$$

فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ من نوع واحد أي $\sum_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$ متقاربة وبالتالي الجداء متقارب.

تمرين: أوجد قيمة الجداء:

$$\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}$$

$$p_n=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}$$

$$=\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}.\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$$

$$p_n=\frac{1}{3}.\frac{2}{4}.\frac{3}{5}.\frac{4}{6}.\frac{5}{7}.\frac{6}{8}\cdots\frac{n-2}{n}.\frac{n-1}{n+1}.\frac{7}{3}.\frac{13}{7}\cdots\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}.\frac{n^2+n+1}{3}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{2}{3}$$

أي أن قيمة الجداء هي $\frac{2}{3}$ والجداء متقارب

تمرين: أوجد قيمة الجداء:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2n+3}.\frac{2n+7}{2n+5}$$

نشكل متتالية الجداءات الجزئية :

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k+3} \cdot \frac{2k+7}{2k+5} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k+3} \cdot \prod_{k=1}^{n} \cdot \frac{2k+7}{2k+5}$$

$$= \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{7}{9} \dots \dots \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{2n+1}{2n+3}\right) \cdot \left(\frac{9}{7} \cdot \frac{11}{9} \cdot \frac{13}{11} \dots \cdot \frac{2n+5}{2n+3} \cdot \frac{2n+7}{2n+5}\right) = \left(\frac{3}{2n+3}\right)\left(\frac{2n+7}{7}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_n = \frac{3}{7}$$

الخواص الأساسية للجداءات غير المنتهية:

مبرهنة:

الشرط اللازم والكافي لكي يكون الجداء غير المنتهي $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ أو $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$ مساوياً للصفر هو أن تكون قيمة المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$ أو $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+b_n)$ مساوية $-\infty$ و هذا يتم بشكل خاص إذا كانت $0 < b_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة

$$p_n = e^{s_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 0 \Rightarrow s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$$

$p = e^{-\infty} = 0$ قيمة الجداء غير المنتهي

التقارب المطلق و التقارب الشرطي للجداء غير المنتهي:

تعريف: نقول عن الجداء غير المنتهي $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ متقارب بإطلاق إذا وفقط إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$ متقاربة بإطلاق ونقول أن هذا الجداء متقارب شرطياً إذا وفقط إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$ متقاربة شرطياً.

مبرهنة:

الشرط اللازم والكافي لتقارب الجداء غير المنتهي $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$ بالإطلاق هو أن تتقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ بالإطلاق.

مثال:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^s}\right)$$

يكون متقارب عندما $s > 1$ ويكون متباعد إذا كان $0 < s \leq 1$ و ذلك تبعاً لما نعرفه عن المتسلسلة الريمانية

مثال: أثبت أن الجداء متقارب شرطياً

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$$

نأخذ $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ نجد أنها متقاربة حسب لايبنتز لأن الحد العام يسعى للصفر ومتناقصة بالقيمة المطلقة لكن المتسلسلة $\sum \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|$ متباعدة و بالتالي الجداء متقارب شرطياً

مثال: ادرس الجداء

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$$

ندرس المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ حسب اختبار لايبنتز يكون الاختبار محقق:

١) الحد العام:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$$

٢) القيم المطلقة لحدها العام متناقصة فهي متقاربة حسب لايبنتز نأخذ:

$$\sum\left|\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right|=\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$$

سلسلة القيم المطلقة متباعدة (ريمانية $p<1$) بالتالي الجداء متقارب شرطياً فقط

"انتهت المحاضرة"

نذير تيناوي

النجمة لا تبدأ بالتألق إلا عندما تشتد الظلمة ☺