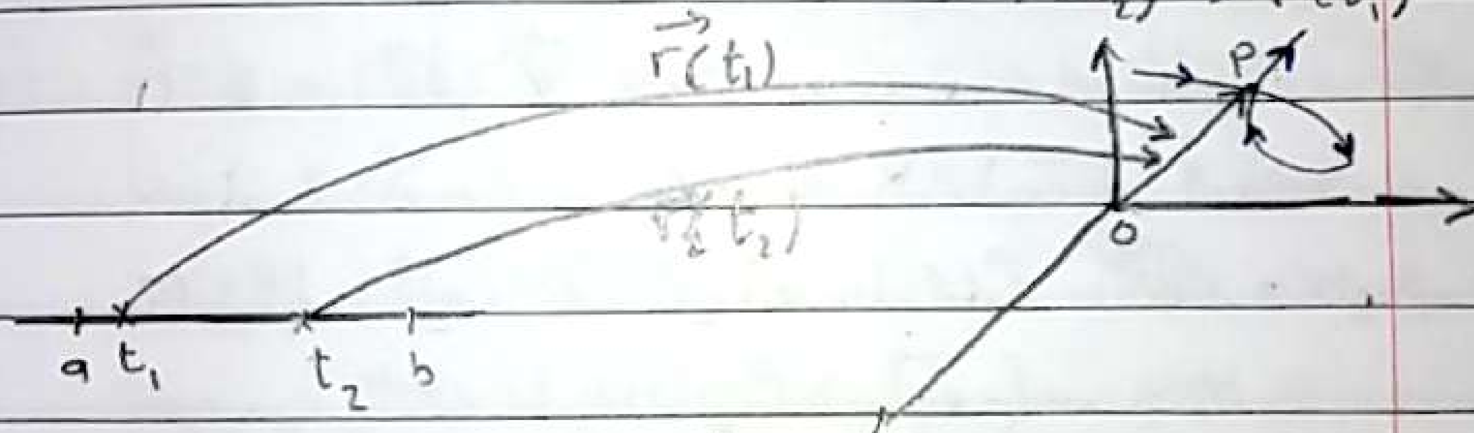
ملاحظة: إن التمثيل الوسيطي $\vec{r}$ يزود مجموعته النقطية
بترتيب (التسلسل) معرّف كما يلي:
رأس $\vec{r}(t_1)$ يأتي قبل رأس $\vec{r}(t_2)$ إذا وفقط إذا كان
$t_1 < t_2$ «نقول في هذه الحالة إن المجموعة النقطية للتمثيل كتبت وفق تزايد قيم الوسيط t»

★ لو كانت نقطة تقابلها وسيطين ونقطة أخرى يقابلها وسيط
فكيف سيكون ترتيبها؟

ملاحظة: إذا كانت P نقطة مقابلة لقيمتين مختلفتين للوسيط
t_1 و t_2 من المرتبة الأولى فإننا نعتبر أن رأسي المتجهين
$\vec{r}(t_1)$ و $\vec{r}(t_2)$



نقطتين مختلفتين في المجموعة النقطية المرتبة.
(لاحظ أن المتجهين $\vec{r}(t_1)$ و $\vec{r}(t_2)$ هندسياً
منطبقين على المتجه $\vec{OP}$ ورأسيهما هما النقطة P)

★ للدلالة على أن نقطتين مختلفتين بعض المراجع ترمز لهما كما يلي:
$(t_1, \vec{r}(t_1))$ و $(t_2, \vec{r}(t_2))$.

Scanned by CamScanner

م 5 2016 / 10 / 17

* في المحاضرة السابقة عرفنا وقلنا التمثيلات الوسيطية: هي دالة متجهية القيمة معرفة على مجال.

ومجال الدالة سميناه تمثيلا وعرفنا المتجهات القيم لدالة في R^3 سميناها المجموعة النقطية للتمثيل.

وقلنا أيضا:

$$L = \{p : \overrightarrow{op} = \vec{r}(t) \wedge t \in I\}$$

$\vec{OL} = \{\overrightarrow{op} : p \in L\}$ متجهات مواضع نقاط L

وميزنا حالات:

1) $\vec{r}^{-1}(\overrightarrow{Op}) = \phi \Leftarrow p \notin L$

2) $\vec{r}^{-1}(\overrightarrow{op}) = \{t_0\} \Leftarrow p$ نقطة من المجموعة النقطية L بسيطة بالنسبة للتمثيل $\vec{r}$ حيث t_0 قيمة وسيط التمثيل الموافقة لنقطة p.

3) $\vec{r}^{-1}(\overrightarrow{op}) = \{t_1, t_2, \dots, t_n\} \Leftarrow p$ نقطة من المجموعة النقطية L مضاعفة من المرتبة n بالنسبة للتمثيل $\vec{r}$.

ملاحظة: من المجموعات النقطية في الفضاء (المجموعات الجزئية في R^3) التي تهمنا في دراستنا مجموعات تسمى منحنيات هندسية ومن حالة خاصة منها تسمى أقواس بسيطة ولنبدأ بتعريف القوس البسيط.

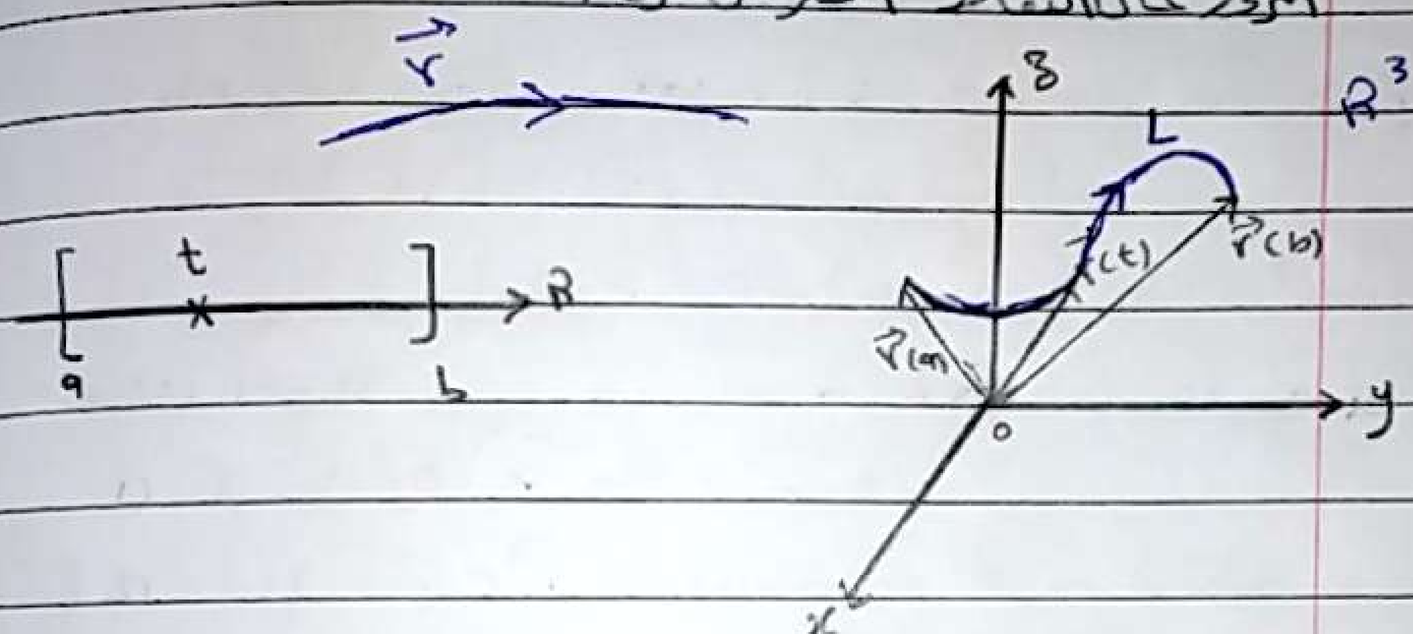
تعريف القوس البسيط: نقول عن مجموعة ما من نقاط الفضاء R^3 إنها قوس بسيط إذا كانت مجموعة نقطية لتمثيل وسيطي معرف ومستمر ومتباين على مجال مغلق.

أي أن $L \subseteq \mathbb{R}^3$ قوس بسيط $\Longleftrightarrow \exists\, \vec{r} : [a,b] \xrightarrow[\text{متباينة}]{\text{مستمرة}} \mathbb{R}^3$

وبحيث

$$\vec{oL} = \vec{r}([a,b])$$

الاستمرار هندسياً يعني عدم الانقطاع والتباين هندسياً يعني عدم المرور على النقاط أكثر من مرة.



* إذا كان لدينا تمثيل وسيطي مستمر ومتباين على مجال مغلق فإن المجموعة النقطية له يشكل قوس بسيط.

* نفرض أن المتحرك يتحرك نحو اليسار ولكن نريد مسح كل النقاط وبذلك لدينا أمرين إما أن يقفز وبذلك لا يختل التباين ويختل شرط الاستمرار أو أن يعود ويمر من نقاط مرة أخرى وبذلك يختل شرط التباين فالحل أن يكون أحد الطرفين $\vec{r}(a)$ والآخر أكبر $\vec{r}(b)$.

عندما تزيد t يستمر $\vec{r}(a)$ باتجاه اليمين وبالتالي الحركة على المنحني ستتم من $\vec{r}(a)$ إلى $\vec{r}(b)$ على المنحني ويمسح كل النقاط.

* لو كانت مواضع $\vec{r}(a)$ و $\vec{r}(b)$ بالعكس سيكون الاتجاه معاكس.

ملاحظة: جميع نقاط القوس البسيط نقاط بسيطة من التمثيل $\vec{r}$

كون $\vec{r}$ متباين أي من المستحيل تحقق $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$ من أجل

$t_2 \neq t_1$

* لكي نثبت أن مجموعة نقطية هي قوس بسيط يكفي أن يوجد
تمثيل مستمر ومتباين على مجال مغلق.

تذكير: الدالة متجهية مستمرة $\Leftrightarrow$ مركبات الدالة المتجهية مستمرة

أمثلة: 1) بيان دالة حقيقية f مستمرة على مجال مغلق $[a,b]$
هو قوس بسيط.

بيان دالة حقيقية f : $G = \{(x, f(x)) , x \in [a,b]\}$

* بيان دالة هو مجموعة ثنائيات عندما x يمسح المنطلق فالثنائية
تمسح المستقر.

* يجب إثبات أنه يوجد تمثيل مستمر ومتباين لمجموعة نقطية هي البيان

إن الدالة: $t \in [a,b]$: $\vec{r}(t) = t\vec{i} + f(t)\vec{j}$

$= (t, f(t))$

مستمرة على مجال $[a,b]$ وذلك لأن كلا من مركبتيها $x = t$
(هو كثير حدود مستمر على $\mathbb{R}$ بكاملها) و $y = f(t)$ حسب الفرض f
مستمر على $[a,b]$.

كما أن هذه الدالة متباينة لأن مركبتها الأولى $x = t$ دالة متباينة.

*(كل دالة مطردة تماماً على مجال تكون متباينة على هذا المجال إلا أن
العكس غير صحيح). نلاحظ $x = t$ مطردة تماماً لأن:

$x'(t) = 1 > 0 \Leftarrow x$ متزايدة تماماً على $[a,b]$

وحسب (*) $\Leftarrow x$ متباينة على $[a,b]$ $\Leftarrow \vec{r}$ متباينة.

وذلك حسب ملاحظة التالية

ملاحظة: إن تباينت إحدى مركبات دالة متجهة فإن الدالة المتجهة تكون متباينة والعكس غير صحيح بالضرورة.

أي قد تكون دالة متجهة متباينة دون أن تكون أي من مركبات الدالة متباينة.

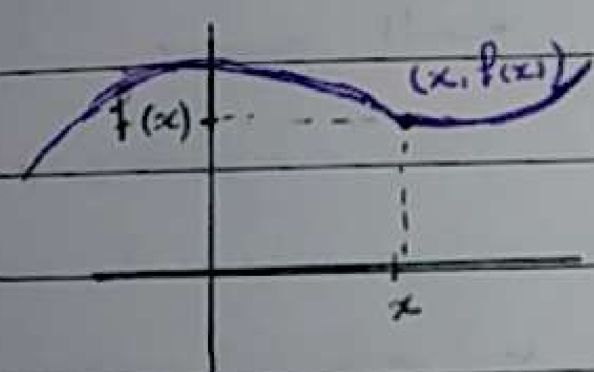
- بقي التحقق أن مجموعة نقطية لها التمثيل هو البيان.

$$\vec{r}([a,b]) = \{\vec{r}(t) : t \in [a,b]\}$$

$$= \underbrace{\{(t, f(t)) : t \in [a,b]\}}_{=\overrightarrow{OG}} \Rightarrow \text{مجموعة نقطية لـ } \vec{r} \text{ هي بيان } G$$

أي مجموعة قيم $\vec{r}$ هي $\overrightarrow{OG}$

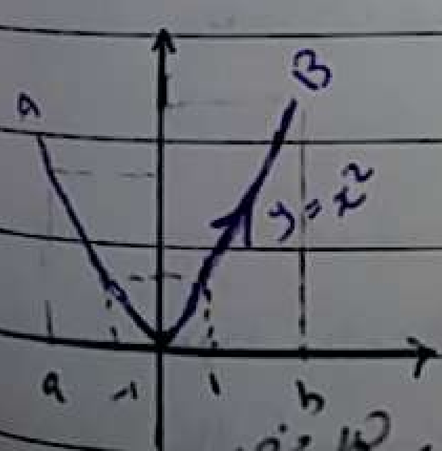
وعليه تحققت الشروط ومنه الدالة f تمثل قوس بسيط



حالة خاصة: أي قوس محدد من القطع المكافئ $y = x^2$ أو من أي قطع مكافئ هو قوس بسيط

$y = x^2 \; : \; a \le x \le b$

إن هذا القوس هو بيان لدالة حقيقية $f(x) = x^2$ المعرفة على $[a,b]$ من الواضح



f مستمرة على $[a,b]$ لأن x^2 مستمرة على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة على أي مجال جزئي من $\mathbb{R}$ وبالتالي حسب الحالة السابقة.

2) إن نصف دائرة الواحدة العلوي هو قوس بسيط.

لأن نصف الدائرة هذه سيكون بياناً للدالة الحقيقية $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

المستمرة على مجال المغلق $[-1,1]$

معادلة دائرة واحدة $x^2+y^2=1$ $\Rightarrow y=\mp\sqrt{1-x^2}$ لكن الجزء العلوي سنأخذ جذر الموجب

لو أخذنا أي جزء من هذا القوس سيكون الأمر كذلك

لنأخذ التمثيل الوسيطي آخر لنصف الدائرة العلوي ←

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t) \;;\; t\in[0,\pi]$$

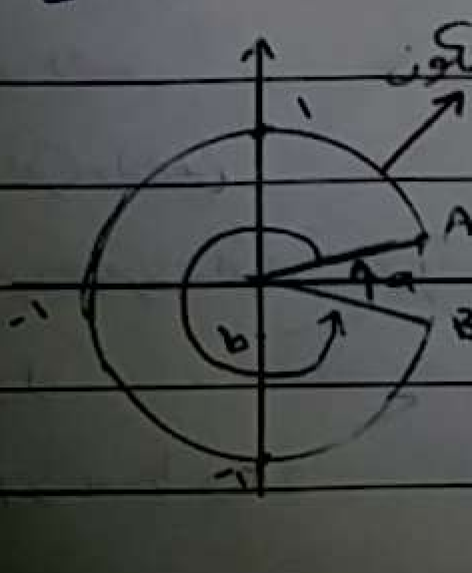
هي دالة متجهية القيمة ومستمرة على $[0,\pi]$ لأن كل من مركبتيها مستمرة على $[0,\pi]$ وهي دالة متباينة لأن مركبتها الأولى $\cos t$ متباينة على مجال $[0,\pi]$ لأنه من المستحيل وجود زاويتين في $[0,\pi]$ يكون لها نفس $\cos$ أو لأن $\cos t$ دالة متناقصة تماماً على مجال $[0,\pi]$ حيث $(\cos t)' = -\sin t < 0$ ← $\cos t$ متناقصة تماماً.

بنفس طريقة بالنسبة لنصف سفلي من دائرة حيث سنأخذ المجال من

$f(x) = -\sqrt{1-x^2}$ أو $[-\pi,0]$

ملاحظة: إذا كان لدينا منحنى ووجد مستقيم شاقولي يقطعه بأكثر من نقطة ووجد مستقيم أفقي يقطعه بأكثر من نقطة فمستحيل أن يكون هذا المنحنى هو بيان لدالة حقيقية.

مثال: مجموعة نقاط قوس جزئي تماماً من دائرة الواحدة مع طرفيه هو قوس بسيط. هذه دالة مستحيل أن تكون بيان لدالة حقيقية



لأنه يوجد مستقيم أفقي تقطع ← دالة بأكثر من نقطة.

لو كان القوس لتكن A و B طرفي القوس و a, b هي قياس زاويتي $\vec{OA}$ و $\vec{OB}$

يقطع ox مع $\vec{ox}$ المنتميتين إلى المجال $[0,2\pi]$ عندئذ إن الدالة:

بحيث لنا أخذ $\vec{r}(t)=(\cos t , \sin t)$ حيث $a \le t \le b$ وهي ناتجة $\vec{r}(t)$ مع ox

مجال $[0,2\pi]$ هي تمثيل وسيطي للقوس المرسوم لأنه عندما t تمسح المجال

$[a,b]$ فإن رأس المتجه $\vec{ab}$ يمسح كامل القوس.

وضوحاً $\vec{r}(t)$ مستمرة لأن كل من مركبتيها مستمرة على مجال $[a,b]$

cos غير متباينتان إن $\cos t$ ، $\sin t$ غير متباينتين على مجال $[a,b]$ ولكن

في ربع ثاني الدالة $\vec{r}$ متباينة (وهذا مثال على أن تكون $\vec{r}$ متباينة ومركباتها لا)

لنثبت أن $\vec{r}(t)$ متباينة:

$$t_1, t_2 \in [a,b] \text{ و } \vec{r}(t_1)=\vec{r}(t_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos t_1 = \cos t_2 \\ \sin t_1 = \sin t_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow t_1 = t_2 + 2\pi k \ : k \in \mathbb{Z}$$

$b-a \le \pi$

فمن نصف لكن في المجال المعطى لا يمكن لـ k إلا أن تأخذ القيمة 0 لأن

قوس أو أمل $b-a < 2\pi$ وهذا يعني أننا وبذلك تكون $t_1 = t_2$

$b-a > \pi$ $\vec{r}$ دالة متباينة والقوس الجزئي من دائرة هو قوس بسيط.

القوس أكبر

من نصف

دائرة ولنفرض

أنه أصغر من دائرة

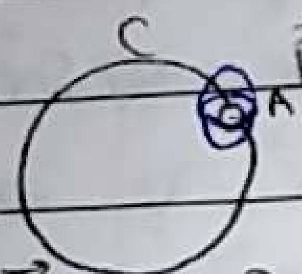
كامل.

$2\pi > b-a > \pi$

* مثال: دائرة ما عدا نقطة لا يمثل قوساً بسيطاً.

البرهان:

إن دائرة ما عدا نقطة في $\mathbb{R}^2$ أو $\mathbb{R}^3$ ليست مغلقة



$L = C - \{A\}$ لا يمكن أن تكون قوساً بسيطاً

نفرض جدلاً أنها قوس بسيط هذا يعني

وجود تمثيل مستمر ومتباين $\vec{r}:[a,b] \to \mathbb{R}^3$ بحيث

يكون $\vec{r}(\underbrace{[a,b]}_{\text{متراصة}}) = \vec{L}$ ، صورة متراصة وفق $\vec{r}$ مستمر ستكون

متراصة وعليه ستكون L مغلقة لأن

L ليست مغلقة لأن:

$A \in \mathbb{R}^3 \setminus L$

* هل نقطة A داخلية في مجموعة متممة؟ الجواب لا

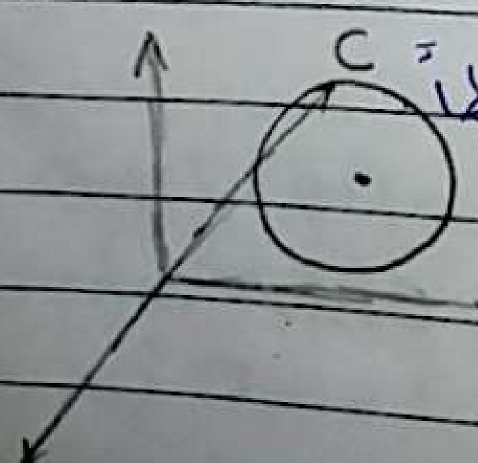
لأن أي كرة مركزها A مفتوحة لن تكون محتواة في $\mathbb{R}^3 \setminus L$

إذاً المتممة ليست مفتوحة ← $\mathbb{R}^3 \setminus L$ غير مفتوحة ← L

ليس أي: ليست مغلقة وعليه فإن L ليست متراصة.

الدائرة عدا نقطة لا يمكن أن تكون صورة لمجموعة متراصة وفق

تابع مستمر.



مثال: الدائرة كاملة ليست قوساً بسيطاً

لو فرضنا جدلاً أن الدائرة قوس بسيط

هذا يعني وجود تمثيل مستمر ومتباين

على مجال مغلق مجموعته النقطية هي

OC حيث C تمثل جميع نقاط الدائرة.

أي $\exists \vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$

مستمر ومتباين وَ حيث $\vec{r}([a,b]) = \vec{OC}$

شوية نقطة منتهية بما أن الدائرة مغلقة فلا بد من وجود قيمتين للوسيط r

تقابله قوساً t_1 و t_2 من المجال $[a,b]$ حيث يكون $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$

بسيطاً ولكن يجب عدم تحقق ذلك يؤدي إلى عدم تباين الدائرة وبالتالي

لذا لم تحقق فإن $\vec{r}$ ستكون دالة غير متباينة وهذا تناقض وعليه

سيكونا ليس فإن الدائرة الكاملة لا يمكن أن تكون قوساً بسيطاً.

قوساً بسيطاً

مثل دائرة

في مجال مغلق $[a,b]$

مثال: لتكن L مجموعة نقاط الفراغ (x,y,z) المحققة

للمعادلتين $y = f(x)$ ، $z = g(x)$

و $x \in [a,b]$ حيث f, g دالتان مستمرتان

على $[a,b]$ إنها قوس بسيط.

الحل:

$$L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a,b] ; y = f(x) \wedge z = g(x)\}$$

$$\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$$

معرفة على مجال مغلقة $\vec{r}(t) = (t, f(t), g(t))$

ومستمرة لأن كل من مركباتها

دالة مستمرة على $[a,b]$

إن $\vec{r}(t)$ متباينة لأن مركبته الأولى $x = t$ متباينة

على $[a,b]$ والآن يكفي أن نثبت $\vec{r}([a,b]) = \vec{OL}$

$$\vec{r}([a,b]) = \{\vec{r}(t) : t \in [a,b]\}$$

$$= \{(t, f(t), g(t)) : t \in [a,b]\}$$

مجموعة نقاط
$\vec{OL}$ مجموعة متجهات

إما أحداثيات نقطة في R^3 أو متجه بدايته النقطة التي أحداثياتها (x,y,z)

$$= \{ (x,y,z) : x \in [a,b] \wedge y = f(x) \wedge z = g(x) \}$$

$$= \vec{OL}$$

هي مجموعة نقطية لـ r

وعليه تم المطلوب.

المنحنى الهندسي: لتعريف المنحنى الهندسي نحتاج لتعريف الدالة المتباينة محلياً (موضعياً).

التعريف: نقول عن دالة $\vec{r}:]a,b[\to R^3$ إنها متباينة محلياً إذا وفقط إذا لأي $t_0 \in]a,b[$ يوجد عدد موجب δ (مدى) بحيث يكون: $[t_0-\delta, t_0+\delta] \subseteq]a,b[$

وتذكر أن يكون أحد طرفي مجال هو a وفقط لأنها مفتوحة

$\vec{r}|_{[t_0-\delta, t_0+\delta]}$ متباينة

أي مقصور دالة $\vec{r}$ على مجال مغلق $[t_0-\delta, t_0+\delta]$ هي متباينة.

لكن I مجال طرفاه a و b حيث $-\infty \le a < b \le \infty$

أي بعض جميع أنواع المجالات عندما نقول عن دالة $\vec{r}$: $\vec{r}: I \to R^3$ إنها متباينة محلياً إذا كانت متباينة محلياً على $]a,b[$.

وبشرط يكون أحد طرفي على الأقل a أو b منتمي لـ I فنضيف الشرط: 1) عندما $a \in I$ يوجد $\delta > 0$ بحيث يكون $[a, a+\delta] \subseteq I$

و $r|_{[a,a+\delta]}$ متباين.

٢) إذا كان $b \in I$ يوجد $\delta > 0$ بحيث يكون $[b-\delta, b] \subseteq I$ يعني

نصف الجوار

و $\vec{r}|_{[b-\delta, b]}$ متباينة

ملاحظة: من الواضح أن إذا كانت $\vec{r}$ دالة مستمرة على مجال I وكانت متباينة محلياً فإن مجموعة النقاط $\vec{r}|_{[t_0-\delta, t_0+\delta]}$ هي قوس بسيط.

كل دالة متباينة هي متباينة محلياً (جاءت من كون متباينة محلياً) والعكس غير صحيح

$\vec{r}(t)=(\cos t, \sin t)$ على مجال $[0, 4\pi]$ هو ليس متباين ومتباين محلياً

* مثال على دالة ليست متباينة محلياً:

$$\vec{r}(t) = (|t|, t^2) ; \ t \in [-1, +2]$$

هي ليست متباينة محلياً لأن:

$\forall \delta$: $\vec{r}|_{[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]}$ حيث $[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}] \subseteq [-1, +2]$

هي غير متباينة حيث لا نستطيع إيجاد أي جوار صغير يكون $\vec{r}$ متباين عليه.

$$\vec{r}(-\tfrac{\delta}{2}) = \left(|-\tfrac{\delta}{2}|, (\tfrac{\delta}{2})^2\right) = \left(\underbrace{\tfrac{\delta}{2}}_{\delta \text{ موجبة}}, \tfrac{\delta^2}{4}\right) = \vec{r}(\tfrac{\delta}{2})$$

لكن $-\frac{\delta}{2} \neq \frac{\delta}{2}$ وعليه فإن $\vec{r}$ ليست متباينة وإذاً هي ليست متباينة محلياً.

مثال عن تابع

معيّن هو x^2 هو ليس متباين وليس متباين محلياً.

الدالة متباينة إذا لم يوجد مستقيم أفقي يقطع دالة بأكثر من نقطة.

نعرف أن دالة متزايدة تماماً إذا كنا صاعدين من يسار إلى يمين

" " متناقصة " " " نازلين من يمين إلى يسار

وتكون متباينة في حال قطعها مستقيم بنقطة

المنحني الهندسي: نقول عن مجموعة $\mathcal{L}$ من نقاط الفضاء إنها منحني هندسي إذا كانت مجموعة نقطية لتمثيل وسيطي مستمر ومتباين محلياً على مجال ما (مفتوح، مغلق، نصف مفتوح، محدود، غير محدود)

وهذا يعني $\mathcal{L}$ منحني هندسي $\iff$ وجود

$$\vec{r} : I \xrightarrow[\text{متباينة محلياً}]{\text{مستمرة}} \mathbb{R}^3$$

حيث $\vec{r}(I) = \mathcal{L}$

وهذا يعني أن $\mathcal{L}$ مجموعة نقطية لـ r

* إذا كانت $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ فإننا نسمي $\vec{r}$ وبشكل مكافئ المعادلات الثلاث $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ تمثيلاً وسيطياً للمنحني $\mathcal{L}$

أمثلة: 1) كل قوس بسيط هو منحني هندسي (لأن كل متباين هو متباين محلياً) والعكس غير صحيح بالضرورة.

2) منحني هندسي وليس قوس بسيط.

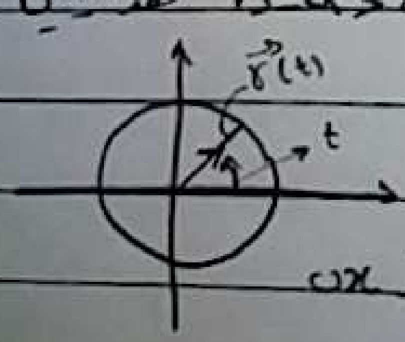
دائرة الكاملة هي منحني هندسي وليست قوساً بسيطاً.

سنثبت أن دائرة واحدة هي منحني هندسي.

لنأخذ التمثيل التالي

$\vec{r}(t) = (\cos t , \sin t)$; $a < t < b$ يمكن اختيار $0 \le t \le 2\pi$

حيث a و b ثابتان يحققان أن $b - a > 2\pi$ وهذا يعني



إذا مسح t المجال من a إلى b فإن $\vec{r}(t)$ يمسح كامل الدائرة حيث t يمثل الزاوية بين شعاع $\vec{r}(t)$ واتجاه موجب لـ ox

(بغض النظر عن طبيعة نقاط دائرة هل هي مضاعفة أو بسيطة)

وعليه يتكون دائرة الواحدة هي مجموعة نقطية لـ $\vec{r}$.

إذن $\vec{r}$ تمثيل مستمر على مجال الأطوال لأن كل من مركبتيه مستمرتين على المجال الأطوال كما أن $\vec{r}$ دالة متباينة محليا لا ينشدن

وبالنتيجة فإن دائرة هي منحنى هندسي.

Scanned by CamScanner