Syria Math

التحليل العددي1

الدكتورة: رشا بعاج

المحاضرة : الخامسة

التاريخ : ٢٠١٦/١٠/٢٢

إعداد : محمد فليون && عبد الرحمن البحش

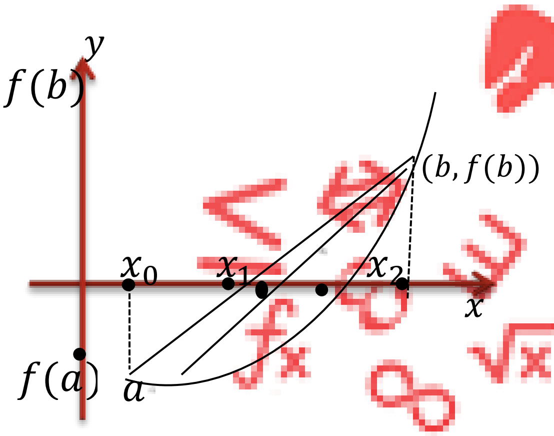
مرحبا اصدقائي: ستكون محاضرتنا هذه تتمّة للمحاضرة السابقة نبدأ بمزايا طريقة تنصيف المجال و سنأخذ الطّرق المجاليّة في حلّ المعادلات غير الخطيّة، أول طريقة تعرفنا عليها كانت في محاضرتنا السابقة وهي طريقة تنصيف المجال، أمّا في محاضرتنا هذه طريقة الوضع الخاطئ .

مزايا طريقة تنصيف المجال:

١) التقارب مضمون
٢) حدّ الخطأ المعطى يتناقص بمقدار النصف في كل تكرار.
٣) التّقارب بطيء بسبب الاعتماد فقط على قيمة a,b

لنبدأ: <<الطّرق المجاليّة>>

١) طريقة تنصيف المجال:
٢) طريقة الوضع الخاطئ:



تعتمد هذه الطريقة على اختيار نقطة بديلة عن المنتصف التي جرى اختيارها في طريقة تنصيف المجال حيث تختار هذه الطريقة نقطة تقاطع النقطة الواصلة بين النقطتين $(a,f(a))$ و$(b,f(b))$ مع المحور ox وتحسب هذه النقطة من العلاقة الآتية:

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1)$$

إذا كان $f(x_2).f(x_1) < 0$ نعيد العملية السابقة وبذلك يكون المجال أصبح عندنا هو $[x_1,x_2]$ أي نقوم بإعادة تحديد المتغيرات الابتدائية $x_1 = x_1,\ x_0 = x_2$

ونطبّق القانون مرّة أخرى

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1)$$

- **خوارزميّة طريقة الوضع الخاطئ:**

١) بفرض $f_0 . f_1 < 0 \iff f(x_0).f(x_1) < 0$

٢) إدخال (تحديد القيم الابتدائيّة): $\varepsilon > 0$، من نص السؤال $= \varepsilon$

$m > 0$ حيث m عدد التكرارات

٣) $i = 2$ يمثّل دليل التّكرار المحسوب

٤) طالما أنّ $i \leq m$

نحسب x_2 من القانون

$$x_2 = x_1 - \left[\frac{x_1 - x_0}{f_1 - f_0}\right] . f_1$$

فإذا كان $|f_2| \leq \varepsilon$ عندئذٍ x_2 هي الجذر التّقريبي المطلوب ونتوقّف

إذا لم يتحقق الشّرط ولم يطبق فكرّر $i = i + 1$

أمّا إذا كان $f_2 . f_1 < 0$ عندئذٍ سنبدّل $x_0 = x_2$ أي $f_0 = f_2$

وإلا $x_1 = x_2$ أي

$f_1 = f_2$

٥) إخراج: تفشل الطّريقة في إيجاد الجذر بالدّقّة ε عند هذه النقطة حسب عدد التّكرارات m

٦) توقّف.

كي لا تفشل الخوارزمية يجب اختيار عدد تكرارات مناسب للحصول على الدّقة المطلوبة

مثال:

$f(x) = x^2 - 3$ في المجال $[1,2]$ بطريقة تنصيف المجال بدقّة $\varepsilon(f) = 0.01$

n	x_0 a	x_1 b	f_0 $f(a)$	f_1 $f(b)$	x_2 c	التعديل	$\|b - c\|$	f_2 $f(c)$
1	1	2	-2	1	1.6667	$a = c$	0.6667	-0.2221
2	1.6667	2	-0.2221	1	1.7273	$a = c$	0.0606	-0.0164
3	1.7273	2	0.0164	1	1.7317	$a = c$	0.0044	0.0012

$$|f(1.7317)| < \varepsilon = 0.01$$

إذا كانت الدالة مقعرة في بعض الدوال تتقارب طريقة تنصيف المجال اسرع من الوضع الخاطئ

- **الفرق بين طريقة التّنصيف وطريقة الوضع الخاطئ:**

- الفرق هو أنّ طرفي المجال في طريقة التنصيف يمكن أن يتغير في حين أنّ طريقة الوضع الخاطئ تغيَر أحدّ الطّرفين ويبقى الثاني ثابتا إذا كان التابع مقعّر (نحن ندرس دائما التابع مقعّر)
- في بعض التوابع تتقارب طريقة التنصيف أسرع من طريقة الوضع الخاطئ

- **تقدير الخطأ لطريقة الوضع الخاطئ:**

من أجل دقة معينة ε نفترض أن :

$$\left|\frac{\lambda}{\lambda - 1}\right| |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$$

حيث أن $\lambda = \frac{x_{n-2} - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}}$

➢ **ملاحظة:** يمكن تقدير الخطأ بدءاً من التكرار الثالث.

مثال: أوجد جذر الدالة بطريقة الوضع الخاطئ

$$f(x) = x^2 + 2x^2 - x - 1$$

على المجال[1,2] وبدقة ε = 0.005

الخطأ	f_2	x_2	f_1	f_0	x_1	x_0	I
....	-0.549	1.1	9	-1	2	1	1
....	-0.274409	1.1517436	9	-0.549	2	1.1	2
0.023638	-0.1307425	1.1768409	9	-0.274409	2	1.151746	3
0.0104375	-0.060875	1.1886277	9	-0.1307425	2	1.1768409	4
0.0046907	-0.02804	1.1940789	9	-0.0608757	2	1.1886277	5

حيث الجذر التقريبي المطلوب بتكرار الخامس هو 0 $x_2 = 1.1940789$

لان $0046907 < 0.005$

ملاحظة: في الامتحان يجب كتابة الجدول مع القانون

$$x_2 = x_1 - \left[\frac{x_1 - x_0}{f_1 - f_0}\right] . f_1$$

حل الوظيفة من المحاضرة السابقة:

أوجد جذر المعادلة $(x-10)(x-2)(x-4)+1=0$

في المجال [0,4] وبدقة $\varepsilon(f)=0.01$

نحول المعادلة إلى تابع　　$(x-10)(x-2)(x-4)+1=0$

$$x^3-7x^2+14x-7=f(x)$$

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$c=\frac{a+b}{2}$	$f(c)$	التبديل	نصف المجال $\frac{b-a}{2}$
1	0	4	-7	1	2	1	b=c	2
2	0	2	-7	1	1	1	b=c	1
3	0	1	-7	1	0.5	-1.625	a=c	0.5
4	0.5	1	-1.625	1	0.75	-0.0157	a=c	0.25
5	0.75	1	-0.0157	1	0.875	0.56	b=c	0.125
6	0.75	0.875	-0.0157	0.56	0.812	0.289	b=c	0.0625
7	0.75	0.812	-0.0157	0.289	0.78	0.1357	b=c	0.0313
8				.	.			
9				.	.			
١٠				.	.			

بما أن عدد التكرار كبير بسبب $\varepsilon=0.01$ فإننا نستطيع إيجاد n من قانون

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2} = n \geq \frac{\ln(\frac{4-0}{0.01})}{\ln 2}$$

$$n \geq 8.64385619$$

ملاحظة : نوهت الدكتورة أنه في الامتحان يراعى ألا يأتي عدد التكرار كبير.

" انتهت المحاضرة "