محاضرة 3 10/10/2016

جبر الأحداث F :

الحدث : هو أي مجموعة جزئية من فضاء العينة Ω و ينتمي إلى F

نتيجة : بأن مجموعة الأحداث المتعلقة بالتجربة تكوّن P(Ω) والتي هي جبر تام على Ω يدعى جبر الأحداث.

فضاء عينة منتهٍ أو معدود

حالة عامة : إذا كانت Ω (فضاء العينة) غير منتهٍ وغير معدود فإننا نقبل بأن الأحداث المتعلقة بالتجربة تشكل جبراً تاماً على Ω نرمز له بـ F وتسميه جبر الأحداث ، ليس من الضروري أن يساوي P(Ω) التي هي مجموعة جميع أجزاء Ω.

مسلمات احتمالية :

من أجل Ω فضاء عينة فإن قولنا أن A حدث متعلق بالتجربة يعني أن A ∈ F حيث F جبر الأحداث على Ω

وإذا كان A ∈ F فإن الحدث A يقع إذا كانت نتيجة التجربة ω ∈ Ω تحقق أن ω تنتمي إلى A

أي عندما ω ∈ A نقول أن الحدث A قد وقع وإذا كانت ω ∉ A نقول أن الحدث لم يقع.

الحدث الابتدائي : هو حدث مؤلف من عنصر واحد

(كل مجموعة جزئية وحيدة العنصر من Ω تدعى حدثاً ابتدائياً)

نتيجة : إن تطبيق العمليات المنطقية على جبر الأحداث يعطي حدثاً لأن جبر الأحداث هو جبر تام فهو مغلق بالنسبة للعمليات المنطقية

بعض الأحداث الشهيرة : نفرض (Ω, F) فضاءً معتبراً

- الحدث الأكيد : هو Ω
- الحدث المستحيل : هو Ø
- $A, B \in F \Rightarrow A \cup B \in F$

نقول عن الحدث A ∪ B أنه يقع إذا وقع الحدث A أو وقع الحدث B

- A ∩ B يقع إذا وقع A و B معاً.

/ /

الأحداث المتنافية:

إذا كان $A, B \in F$ نقول عنهما أنهما متنافيان إذا كان $A \cap B = \phi$

أي (لا يمكن وقوعهما معاً بآنٍ واحد)

نتيجة: من أجل متتالية متنافية من الأحداث $(A_i)_{i \geq 1}$ متنافية مثنى مثنى

$A_i \cap A_j = \phi$; $i \neq j$ عندئذٍ:

$$\left| \bigcup_{i \geq 1} A_i \right| = |A_1| + |A_2| + \dots$$

فرق حدثين: $A \setminus B = A \cap B'$

يقع إذا وقع A ولم يقع B

الأحداث المتعاكسة (المتتامة):

إذا كان $A \in F$ فإن $A' \in F$ بحيث $A \cap A' = \phi$

و

$A \cup A' = \Omega$

و A' يقع ~~في~~ إذا لم يقع A

الاحتواء: $A \subseteq B$: $A, B \in F$

عندئذٍ وقوع الحدث A يقتضي وقوع الحدث B ولكن العكس غير صحيح:

- $w \in A \;,\; A \subseteq B \Rightarrow w \in B$

- $w \in B \not\Rightarrow w \in A$

نتائج:

* الحدث ϕ يتنافى مع أي حدث آخر
* الأحداث الابتدائية تتنافى مع بعضها البعض

التعاريف الأساسية للاحتمال.

1. التعريف التقليدي للاحتمال

إذا كانت Ω فضاء العينة و F جبر الأحداث عليها و $A \in F$ حدث من F فإننا نعرف الاحتمال $P(A) := \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{k}{n}$

2. التعريف الإحصائي للاحتمال

إذا كانت $n(A)$ عدد مرات تكرار وقوع الحدث A فإننا نعرف الاحتمال بالشكل : $P(A) \approx \frac{n(A)}{n} =$ التكرار النسبي لـ A

كلما كانت n كبيرة كان التعريف أدق

3. التعريف الرياضي للاحتمال تعريف كولموغوروف

نفرض Ω فضاء العينة لتجربة عشوائية و F جبر الأحداث المعرف على Ω ولنعرف الدالة : $P : F \longrightarrow \mathbb{R}$

بحيث تحقق الشروط :

1) $\forall A \in F \; ; \; P(A) \geq 0$

2) $P(\Omega) = 1$

3) إذا كانت : $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ متتالية من الأحداث من F بحيث $A_i \cap A_j = \emptyset$ من أجل $i \neq j$ فإن :

$$\boxed{P\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) = \sum_{i\geq 1} P(A_i)}$$

عندئذٍ ندعو P دالة الاحتمال أو احتمال ويكون $P(A)$ احتمال وقوع الحدث A من F في Ω

تعريف : ندعو الثلاثية (Ω, F, P) الفضاء الاحتمالي حيث Ω فضاء العينة , F جبر الأحداث على Ω و P قياس احتمالي معرف حسب كولموغوروف.

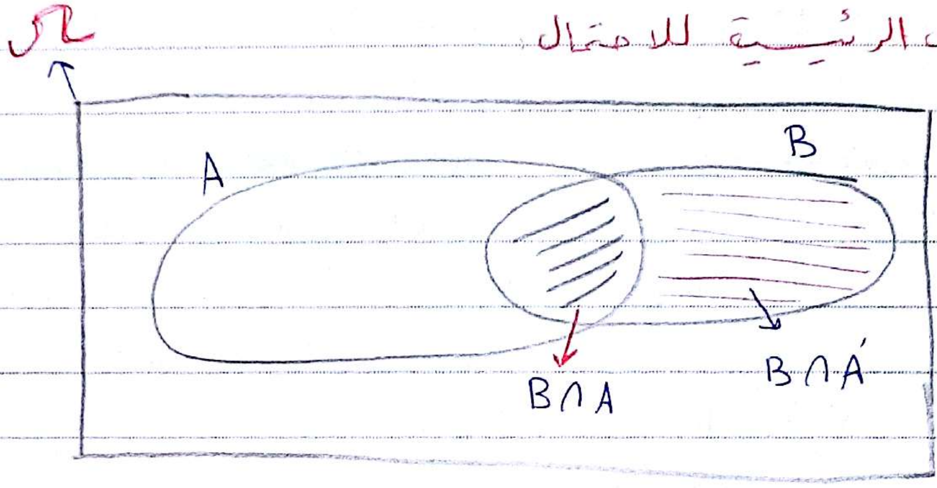
ندعو هذا الفضاء فضاء احتمالي منفصل (متقطع) إذا كانت مجموعة الأحداث الابتدائية مجموعة منتهية أو غير منتهية لكنها قابلة للعد

ويكون فضاء مستمراً (متصلاً) إذا كانت مجموعة الأحداث الابتدائية مجموعة غير منتهية وغير قابلة للعد

ملاحظة:

يوجد أمثلة سهلة في الكتاب يرجى قراءتها

الخصائص الرئيسية للاحتمال



$$B = B \cap \Omega = B \cap (A \cup A') = (B \cap A) \cup (B \cap A')$$

نحصل على حدثين متنافيين وبالتالي:

① $$\boxed{P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A')}$$

② $$\boxed{P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')}$$

③ نفرض $\boxed{\Omega = B}$ فإنه من ① نجد:

$$P(\Omega) = P(\Omega \cap A) + P(\Omega \cap A')$$

$$\Rightarrow P(\Omega) = \boxed{P(A) + P(A') = 1}$$

/ /

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} P(A) = 1 - P(A') \\ P(A') = 1 - P(A) \end{array}}$$

④ نبدل $\boxed{A = \phi}$ في ③ سنجد :

$$P(\phi) = 1 - P(\phi')$$
$$= 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{P(\phi) = 0}$$

⑤ إذا كانت $\boxed{A \subseteq B}$ فإن :

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A')$$
$$= P(A) + P(B \backslash A)$$

$$\Rightarrow \boxed{P(B \backslash A) = P(B) - P(A)}$$

⑥ من ⑤ نجد أنه حسب التعريف:

$$P(B \backslash A) \geq 0$$
$$\Rightarrow P(B) - P(A) \geq 0$$
$$\overset{A \subseteq B}{\Longrightarrow} \boxed{P(A) \leq P(B)}$$

⑦ لدينا $\phi \subseteq A \subseteq \Omega$ وبالتالي من ⑥ نجد أن:

$$P(\phi) \leq P(A) \leq P(\Omega)$$

$$\boxed{0 \leq P(A) \leq 1}$$

⑧ من أجل متتالية من الأحداث $(A_i)_{i\geq1}$ من F فإن :

$$P\Big(\bigcup_{i\geq1} A_i\Big) = 1 - P\Big(\bigcup_{i\geq1} A_i\Big)'$$

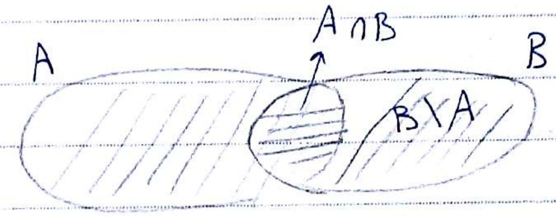
انتباه في الكتاب موجود لا وهو خاطئ

دومورغان

⑧ $$\boxed{P\Big(\bigcup_{i\geq1} A_i\Big) = 1 - P\Big(\bigcap_{i\geq1} A_i'\Big)}$$

هذه الخاصية من أجل الطلبة في مقررات قادمة

⑨



$$A \cup B = A \cup (B \setminus A)$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A) \quad ⊛$$

لكن : $(B \setminus A) = B \setminus (A \cap B)$

و $A \cap B \subseteq B$

$$\Rightarrow P(B \setminus A) = P(B \setminus (A \cap B))$$
$$= P(B) - P(A \cap B)$$

نعوض في ⊛ فنجد :

⑨ $$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

يمكن تعميم الخاصية ⑨ من أجل ثلاث أحداث كما يلي:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$
$$- P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

مثال 17 صفحة 42

مؤسسة تجارية تستخدم عمّالاً من المدينة ومن خارجها فإذا كان 60% من العمّال أناثاً و 30% من العمال من المدينة وواحد من العمال من كل أربعة عمّال هو من الذكور ومن المدينة عيّن نسبة الاناث العاملات ومن خارج المدينة في هذه المؤسسة

الحل:

	من المدينة C	خارج المدينة B
ذكور M	$M \cap C$	$M \cap B$
اناث F	$\boxed{F \cap C}$	$F \cap B$

$P(F) = 0,60 \Rightarrow P(M) = 0,40$

$P(C) = 0,30 \Rightarrow P(B) = 0,70$

$P(M \cap C) = 0,25$

المطلوب: $P(F \cap B) = ?$

$$P(F) = P(F \cap B) + P(F \cap C)$$

$$P(F \cap B) = P(F) - P(F \cap C)$$

$$P(F \cap B) = P(F) - [P(C) - P(M \cap C)]$$

$$P(F \cap B) = 0,60 - [0,30 - 0,25]$$

$$P(F \cap B) = 0,55$$

انتهت المحاضرة الثالثة.