محاضرة 5 / /

« الفصل الثاني »

الاحتمال الشرطي والاستقلال الشرطي:

الأمثلة المحلولة من الصفحة 41 - 44 مطلوبة

تعريف: ليكن (Ω, F, P) فضاءً احتمالياً و $A, B \in F$ بحيث أن $P(B) > 0$ فإننا نعرف الاحتمال الشرطي لوقوع الحدث A علماً أن B قد وقع بـ:

$$\boxed{P_B(A) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

ويمكن بالمثل تعريف الاحتمال الشرطي بالنسبة لـ A إذا كان $P(A) > 0$ بـ:

$$\boxed{P_A(B) := \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

نتيجة:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \boxed{\frac{|A \cap B|}{|B|}}$$

مبرهنة: إذا كان (Ω, F, P) فضاءً احتمالياً و $A \in F$ بحيث $P(A) > 0$ فإن الاحتمال المشروط بـ A : (P_A) يكون احتمالاً على F والفضاء (Ω, F, P_A) فضاءً احتمالياً مشروطاً بـ A.

البرهان: يجب أن تحقق شروط كولموغوروف للاحتمال:

1- من أجل $B \in F$ فإن:

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \geq 0$$

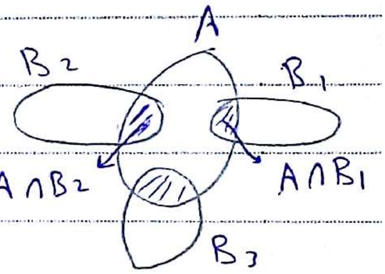
2- $$P_A(\Omega) = \frac{P(A\cap \Omega)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

3- من أجل متتالية $(B_i)_{i\geq 1}$ من الأحداث المتنافية مثنى مثنى فإن:

$$P_A\left(\bigcup_{i\geq 1} B_i\right) = \frac{P\left(A\cap \left(\bigcup_{i\geq 1} B_i\right)\right)}{P(A)}$$

$$= \frac{P\left(\bigcup_{i\geq 1} (A\cap B_i)\right)}{P(A)}$$

$$= \frac{\sum_{i\geq 1} P(A\cap B)}{P(A)}$$



$$= \sum_{i\geq 1} \frac{P(A\cap B_i)}{P(A)}$$

$$= \sum_{i\geq 1} P_A(B_i)$$

$\Longleftarrow$ P_A احتمال

مثال: صنفنا 100 شخص وفقاً للجنس (ذكر أو أنثى) ووفقاً للإصابة بمرض معين (مصاب، غير مصاب) وكانت لدينا النتائج التالية:

	مصاب	غير مصاب	المجموع
ذكر	2	58	60
انثى	1	39	40
المجموع	3	97	100

اخترنا عشوائياً شخصاً واحداً والمطلوب:

① إذا علمنا أن الشخص الذي تم اختياره ذكراً فما هو احتمال أن يكون مصاباً؟

② إذا علمنا أن الشخص الذي تم اختياره مصاباً فما هو احتمال أن يكون ذكراً؟

الحل: نفرض A يدل على أن الشخص ذكر و B يدل على أن الشخص مصاب

①
$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$= \frac{|A\cap B|}{|A|} = \frac{2}{60} \simeq 0{,}03$$

②
$$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{|A\cap B|}{|B|} = \frac{2}{3} \simeq 0{,}6$$

قاعدة الاحتمال المركب:

من تعريف الاحتمال الشرطي يمكن أن نكتب

$$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$P(A\cap B) = P(B)\cdot P_B(A)$$

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P_A(B)$$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow P(A\cap B) = P(A) . P_A(B)$$

$$= P(B) . P_B(A)$$

ويمكن تعميم هذه القاعدة بالشكل:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) . P_{A_1}(A_2) . P_{A_1\cap A_2}(A_3) \dots P_{\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i}(A_n)$$

مثال: صندوق يحوي n كرة زرقاء و $m\geq 2$ كرة سوداء

سحبنا على التتالي كرتين وبدون إعادة، عين احتمال الحصول

على كرتين سوداوين.

الحل: نفرض A الحصول على الكرة الأولى سوداء

نفرض B الحصول على الكرة الثانية سوداء.

الحدث المطلوب: $(A\cap B)$ وحسب قاعدة الاحتمال المركب

فإن: $P(A\cap B) = P(A) . P_A(B)$

$$= \frac{C_1^m}{C_1^{m+n}} . \frac{C_1^{m-1}}{C_1^{m+n-1}}$$

$$\boxed{P(A\cap B) = \frac{m}{m+n} . \frac{m-1}{m+n-1}}$$

مثال: لدى شخص 500 جهاز ارسال تحوي 15 عاطلة عن العمل، بدأ يفحص الأجهزة، جهازاً جهازاً، عين احتمال أن يجد الشخص ثلاثة أجهزة صالحة للعمل ثم يليها جهاز عاطل عن العمل.

الحل: نفرض (E_i) الحدث الدال على أن الجهاز عاطل عن العمل حيث $i = 1, 2, 3, 4$ والحدث المطلوب

$E_1' \cap E_2' \cap E_3' \cap E_4$

وحسب قاعدة الاحتمال المركب فإن:

$P(E_1' \cap E_2' \cap E_3' \cap E_4)$ ‏ E_1' صالح ، E_3' صالح

E_2' صالح

$$= P(E_1') \cdot P_{E_1'}(E_2') \cdot P_{E_1' \cap E_2'}(E_3') \cdot P_{E_1' \cap E_2' \cap E_3'}(E_4)$$

$$= \frac{490}{500} \times \frac{489}{499} \times \frac{488}{498} \times \frac{10}{497} = 0,019$$

تعريف التجزئة:

ليكن (Ω, F, P) فضاءً احتمالياً و $(A_i)_{i \geq 1}$ أحداث من F، نقول عن (A_i) أنها تشكل تجزئة لـ Ω إذا حققت الشروط:

1. $A_i \neq \phi \quad ; \quad i \geq 1$

2. $A_i \cap A_j = \phi \quad , \quad i \neq j$

3. $\bigcup_{i \geq 1} A_i = \Omega$

نتائج :

1- إذا كانت $(A_i)_{i\geq 1}$ تجزئة لـ Ω فإنه ينتج كون $(A_i)_{i\geq 1}$ متنافية مثنى مثنى :

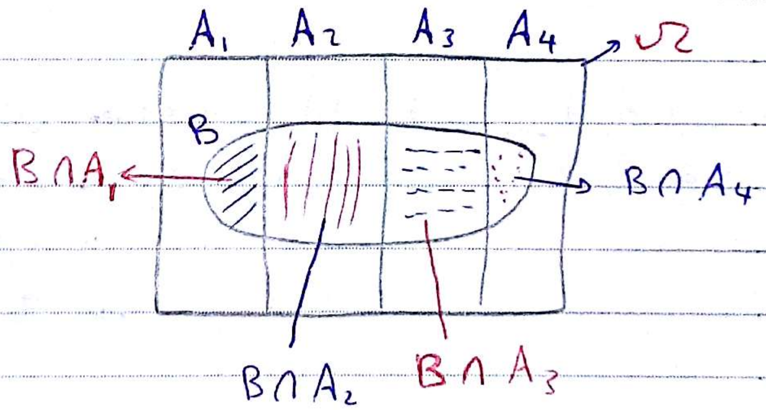
$$P\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) = \sum_{i\geq 1} P(A_i)$$

$$= P(\Omega) = 1$$

قانون الاحتمال الكلي: $\Rightarrow \boxed{\sum_{i\geq 1} P(A_i) = 1}$

2- إن أي تجزئة للحدث الأكيد Ω تؤدي إلى تجزئة لأي حدث متعلق بالتجزئة ذاتها.

فإذا كانت (A_i) تجزئة لـ Ω و $B \in F$ متعلق بهذه التجزئة فإن $(B \cap A_i)_{i\geq 1}$ تشكل تجزئة لـ B



ويكون $B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right)$

$$= \bigcup_{i\geq 1} (B \cap A_i)$$

$$\Rightarrow \boxed{P(B) = \sum_{i\geq 1} P(B \cap A_i)}$$

دستور بايز (قانون السبب):

لتكن $(A_i)_{i\geq 1}$ تجزئة لـ Ω في الفضاء الاحتمالي (Ω, F, P)

وليكن B حدث مرتبط بهذه التجربة فإن دستور بايز ينص على:

$$\boxed{P_B(A_i) = \frac{P(A_i) \cdot P_{A_i}(B)}{\sum_{i\geq 1} P(A_i) \cdot P_{A_i}(B)}}$$

أي أنه إذا وقع B فما احتمال أن يكون الجزء (A_i) هو السبب في وقوعه.

الإثبات:

قاعدة الاحتمال المركب

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \overset{\downarrow}{=} \frac{P(A_i) \cdot P_{A_i}(B)}{\sum_{i\geq 1} P(B \cap A_i)}$$

$$= \frac{P(A_i)\ P_{A_i}(B)}{\sum_{i\geq 1} P(A_i) \cdot P_{A_i}(B)}$$

مثال: مصنع للأدوية فيه ثلاثة خطوط انتاج، الخط الأول A_1 يسهم بـ 30% من انتاج المصنع ومن ضمن انتاجه 1% معيب الصنع، الخط الثاني A_2 يسهم بـ 36% ومن ضمن انتاجه 2% معيب الصنع، الخط الثالث A_3 يسهم بـ 34% ومن ضمن انتاجه 2% معيب الصنع والمطلوب:

1. احسب احتمال أن تكون العبوة المختارة معيبة الصنع
2. إذا كانت العبوة المختارة معيبة الصنع فما احتمال أن تكون من انتاج المصنع الثالث؟

الحل:

A_1	A_2	A_3	
30 %	36 %	34 %	انتاج
1 %	2 %	2 %	معيب

أ ي آ ح :

$$P(A_1) = \frac{30}{100}$$

$$P(A_2) = \frac{36}{100}$$

$$P(A_3) = \frac{34}{100}$$

نلاحظ أن A_1 ، A_2 ، A_3 تشكل تجزئة لفضاء العينة الممثل بانتاج المصنع ونلاحظ أن

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$$

أيضاً من الفرض نجد أنه إذا كان B يدل على أن العبوة معيبة الصنع فإن:

$$P_{A_1}(B) = \frac{1}{100}$$

$$P_{A_2}(B) = \frac{2}{100}$$

$$P_{A_3}(B) = \frac{2}{100}$$

يجب ذكر هذه الجملة بالامتحان ((عليها علامات))

① حسب قاعدة الاحتمال المركب

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i \cap B)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} P(A_i) \cdot P_{A_i}(B)$$

$$= \left(\frac{30}{100}\right)\left(\frac{1}{100}\right) + \left(\frac{36}{100}\right)\cdot\left(\frac{2}{100}\right)$$

$$+ \left(\frac{34}{100}\right)\left(\frac{2}{100}\right)$$

$$= 0,017$$

② حسب دستور بايز نجد:

$$P_B(A_3) = \frac{P(A_3)\cdot P_{A_3}(B)}{\underbrace{\sum_{i=1}^{3} P(A_i)\cdot P_{A_i}(B)}_{=P(B)}}$$

$$= \frac{\frac{34}{100}\cdot\frac{2}{100}}{0,017} = 0,40$$

انتهت المحاضرة الخامسة