المعادلات التفاضلية 1

الدكتور : خليل يحيى

المحاضرة : الثالثة

التاريخ : ٢٦/١٠/٢٠١٦

إعداد : محمد شهلا & خالد الشعار

Web: www.syriamath.net group: Improve our mathematics

قام الدكتور بمراجعة المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى ، ثم قام بعرض أمثلة عنها..

المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى هي التي من الشكل:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

نوجد الحل الأول ، وذلك بجعل $q(x) = 0$:

$$y_1: \quad y' + p(x).y = 0$$

نوجد الحل الثاني (مع طرف ثانٍ) ، $q(x) \neq 0$:

$$y_2: \ y' + p(x).y = q(x)$$

عندها يكون:

$$y = y_1 + y_2$$

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضليّة:

$$\boldsymbol{(1+x^2).y' - 2xy = (1+x^2)^2}$$

الحل: نقسم الطرفين على $(1+x^2)$:

$$\Rightarrow y' - \frac{2x}{1+x^2}.y = 1 + x^2$$

وهي معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من الشكل: $y' + p(x)y = q(x)$

لإيجاد الحل العام لها نتبع الخطوات السابقة (من المحاضرة السابقة):

١) نوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية دون طرف ثانٍ:

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}.y = 0 \Rightarrow y' = \frac{2x}{1+x^2}.y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1+x^2}.y \quad \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2x}{1+x^2}.dx$$

$$\Rightarrow ln|y| = ln|1+x^2| + ln|c| \Rightarrow ln|y| - ln|c| = ln|1+x^2|$$

$$\Rightarrow ln\left|\frac{y}{c}\right| = ln|1+x^2| \Rightarrow \frac{y}{c} = 1 + x^2 \Rightarrow \boxed{y_1 = c.(1+x^2)}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة (دون طرف ثانٍ).

٢) نوجد حل خاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة (مع طرف ثانٍ):

ومن أجل ذلك نجعل الثابت c تابع لــ x فنكتب الحل العام السابق بالشكل:

$$y = c(x).(1+x^2) \dots (*)$$

ثمَّ نشتق بالنسبة لــ x :

$$\Rightarrow y' = c'(x).(1+x^2) + 2x.c(x)$$

والآن نعوض في المعادلة التفاضلية مع طرف ثانٍ:

$$\Rightarrow c'(x).(1+x^2) + 2x.c(x) - \frac{2x}{1+x^2}.c(x).(1+x^2) = 1+x^2$$

$$\Rightarrow c'(x).(1+x^2) = 1+x^2 \ \Rightarrow c'(x) = 1$$

نكامل الطرفين:

$$\Rightarrow c(x) = x + c_1$$

نعوض قيمة $c(x)$ في العلاقة $(*)$ فنحصل على الحل العام المطلوب:

$$\boxed{y = (x+c_1).(1+x^2)}$$

مثال(٢): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\boldsymbol{y' - \frac{1}{x}y = 1}$$

الحل: هي معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من الشكل: $y' + p(x)y = q(x)$

لإيجاد الحل العام لها نتبع الخطوات السابقة ذاتها:

١) نوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية دون طرف ثانٍ:

$$y' - \frac{1}{x}y = 0 \ \Rightarrow y' = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \ \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow ln|y| = ln|x| + ln|c| \Rightarrow ln|y| - ln|c| = ln|x|$$

$$\Rightarrow ln\left|\frac{y}{c}\right| = ln|x| \ \Rightarrow \frac{y}{c} = x \ \Rightarrow \boxed{y_1 = c.x}$$

٢) نوجد حل خاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة (مع طرف ثانٍ):

ومن أجل ذلك نجعل الثابت c تابع لـــ x فنكتب الحل العام السابق بالشكل:

$$y = c(x).x \dots (*)$$

ثمَّ نشتق بالنسبة لـــ x :

$$\Rightarrow y' = c'(x).x + c(x)$$

والآن نعوض في المعادلة التفاضلية مع طرف ثانٍ:

$$\Rightarrow c'(x).x + c(x) - \frac{1}{x}.c(x).x = 1$$

$$\Rightarrow c'(x).x = 1 \ \Rightarrow c'(x) = \frac{1}{x}$$

نكامل الطرفين:

$$\Rightarrow c(x) = \ln x + \ln c_1$$

نعوض قيمة $c(x)$ في العلاقة $(*)$ فنحصل على الحل العام المطلوب:

$$\boxed{y_2 = x.\ln|x.c_1|}$$

مثال(٣): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\boldsymbol{y' - y.\tan x = \frac{1}{\cos x}}$$

الحل: هي معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من الشكل: $y' + p(x)y = q(x)$

لإيجاد الحل العام لها نتبع الخطوات السابقة ذاتها:

١) نوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية دون طرف ثانٍ:

$$y' - y.\tan x = 0 \ \Rightarrow y' = y.\tan x = y.\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y.\frac{\sin x}{\cos x} \ \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{\sin x}{\cos x}.dx$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \ln|\cos x| + \ln|c| \Rightarrow \ln|y| - \ln|c| = \ln|\cos x|$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{y}{c}\right| = \ln|\cos x| \ \Rightarrow \frac{y}{c} = \cos x \ \Rightarrow \boxed{y_1 = c.\cos x}$$

٢) نوجد حل خاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة (مع طرف ثانٍ):

ومن أجل ذلك نجعل الثابت c تابع لـــ x فنكتب الحل العام السابق بالشكل:

$$y = c(x).\cos x \dots (*)$$

ثمَّ نشتق بالنسبة لـــ x :

$$\Rightarrow y' = c'(x).\cos x - \sin x\,.\,c(x)$$

والآن نعوض في المعادلة التفاضلية مع طرف ثانٍ:

$$\Rightarrow c'(x).\cos x - \sin x\,.\,c(x) + c(x).\sin x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\Rightarrow c'(x).\cos x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow c'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

نكامل الطرفين:

$$\Rightarrow c(x) = \tan x + c_1$$

نعوض قيمة $c(x)$ في العلاقة $(*)$ فنحصل على الحل العام المطلوب:

$$\boxed{y_2 = (\tan x + c_1).\cos x = \sin x + c_1.\cos x}$$

((معادلة برنولي))

نقول عن المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى إنَّها معادلة برنولي إذا كانت من الشكل:

$$y' + p(x)y = q(x).y^n \dots (1)\ ;n \neq 1$$

حيث أنَّ: $q(x)$ و $p(x)$ دالتان معرفتان ومستمرتان على مجال $I = [a,b]$ من $\mathbb{R}$

ولإيجاد الحل العام لهذه المعادلة نتبع ما يلي:

نقسِّم الطرفين على y^n :

$$\Rightarrow \frac{y'}{y^n} + \frac{1}{y^{n-1}}.p(x) = q(x) \dots (1)$$

نفرض z بحيث:

$$z = \frac{1}{y^{n-1}} = y^{-(n-1)}$$

نشتق الطرفين:

$$\Rightarrow z' = (1-n).y^{-n}.y' \Rightarrow \frac{y'}{y^n} = \frac{z'}{(1-n)}$$

نعوض في المعادلة (1) :

$$\Rightarrow \frac{z'}{(1-n)} + z.p(x) = q(x)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة يتم ايجاد حلها العام وفق خطوات الحل في المحاضرة السابقة.

مثال(١): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\boldsymbol{y' + 2xy = -xy^4}$$

الحل: نقسم الطرفين على y^4 :

$$\Rightarrow \frac{y'}{y^4} + \frac{2x}{y^3} = -x \ldots (1)$$

وهي معادلة من الشكل برنولي إذاً نفرض:

$$z = \frac{1}{y^3} = y^{-3}$$

نشتق الطرفين:

$$\Rightarrow z' = -3y'.y^{-4} = -3\frac{y'}{y^4}$$

نضرب المعادلة (1) بـــ (-3):

$$\Rightarrow -3\frac{y'}{y^4} - \frac{6x.y}{y^4} = 3x$$

والآن نعوض:

$$\Rightarrow z' - 6x.z = 3x$$

وهكذا حصلنا على معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من المرتبة الأولى نحلّها كما في المثال السابق باتباع الخطوات ذاتها.

مثال(٢): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\boldsymbol{y' + 2xy = xy^3}$$

الحل: نقسم الطرفين على y^3 :

$$\Rightarrow \frac{y'}{y^3} + \frac{2x}{y^2} = x \ldots (1)$$

وهي معادلة من الشكل برنولي إذاً نفرض:

$$z = \frac{1}{y^2} = y^{-2}$$

نشتق الطرفين:

$$\Rightarrow z' = -2y'.y^{-3} = -3\frac{y'}{y^3}$$

نضرب المعادلة (1) بـــ (-2):

$$\Rightarrow -2\frac{y'}{y^3} - \frac{4x.y}{y^3} = -2x$$

والآن نعوض في المعادلة:

$$\Rightarrow z' - 4x.z = -2x$$

وهكذا حصلنا على معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من المرتبة الأولى.

لإيجاد الحل العام لها:

- نوجد حل العام للمعادلة التفاضلية الخطية دون طرف ثانٍ:

$$z' - 4x.z = 0 \Rightarrow z' = 4x.z$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 4x.z \quad \Rightarrow \frac{dz}{z} = 4x.dx$$

$$\Rightarrow ln|z| = 2x^2 + ln|c| \Rightarrow ln|z| - ln|c| = 2x^2$$

$$\Rightarrow ln\left|\frac{z}{c}\right| = 2 \Rightarrow \frac{z}{c} = e^{2x^2} \Rightarrow \boxed{z_1 = c.e^{2x^2}}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة (دون طرف ثانٍ).

- نوجد حل خاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة (مع طرف ثانٍ):

ومن أجل ذلك نجعل الثابت c تابع لـــ x فنكتب الحل العام السابق بالشكل:

$$z = c(x).e^{2x^2} \ldots (*)$$

ثمَّ نشتق بالنسبة لــــ x :

$$\Rightarrow z' = c'(x).e^{2x^2} + 4x.e^{2x^2}.c(x)$$

والآن نعوض في المعادلة التفاضلية مع طرف ثانٍ:

$$\Rightarrow c'(x).e^{2x^2} + 4x.e^{2x^2}.c(x) - 4x.e^{2x^2}.c(x) = -2x$$

$$\Rightarrow c'(x).e^{2x^2} = -2x \Rightarrow c'(x) = \frac{-2x}{e^{2x^2}} = -2x.e^{-2x^2}$$

نكامل الطرفين:

$$\Rightarrow c(x) = \int -2x.e^{-2x^2}.dx = \frac{1}{2}\int -4x.e^{-2x^2}.dx$$

$$\Rightarrow c(x) = \frac{1}{2}e^{-2x^2} + c_1$$

نعوض قيمة $c(x)$ في العلاقة $(*)$ فنحصل على:

$$z = \left(\frac{1}{2}e^{-2x^2} + c_1\right).e^{2x^2} = c_1.e^{2x^2} + \frac{1}{2}$$

والآن نعود فنعوض قيمة z :

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{y^2} = c_1.e^{2x^2} + \frac{1}{2}}$$

وهو الحل العام المطلوب.

المعادلات التفاضليّة التامة

تعريف: نقول عن المعادلة التفاضلية:

$$M(x,y).dx + N(x,y).dy = 0 \ldots (1)$$

حيث أنَّ $M(x,y)$ و $N(x,y)$ دالتان معرفتان ومستمرتان على منطقة ما ولتكن G؛

إنّها تامة إذا وجد تابع $F(x,y)$ معرف ومستمر على G بحيث يكون:

$$dF(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy \ldots (2)$$

بالمقارنة بين (1) و (2) نجد أنَّ:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$$

والتفاضل العام الكلي:

$$\Rightarrow dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}.dx + \frac{\partial F}{\partial y}.dy$$

بما أنَّ الدالتين $M(x,y)$ و $N(x,y)$ قابلتان للمفاضلة ، نأخذ المشتق الجزئي الثاني لها:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

وبالمقارنة طرفاً إلى طرف نجد:

$$\boxed{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}$$

وهو الشرط اللازم لكي تكون المعادلة التفاضلية (1) تامة.

ويكون الحل العام لهذه المعادلة هو: $F(x,y) = c$

مثال٢: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\boldsymbol{x.dy + y.dx = 0}$$

الحل:

$$\begin{cases} M(x,y) = x \Rightarrow \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 0 \\ N(x,y) = y \Rightarrow \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

ومنه فالمعادلة التفاضلية المدروسة تامة.

$$d(x.y) = 0$$

بالمكاملة نجد:

$$x.y = c \Rightarrow \boxed{y = \frac{c}{x}}$$

طريقة إيجاد الحل العام للمعادلات التفاضلية التامة بالطريقة العامة:

وجدنا أن المعادلة التفاضلية التامة تحقق أنَّ:

$$(2)\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \end{cases}$$

لإيجاد الحل العام يجب إيجاد الدالة F نأخذ إحدى العلاقتين في (2):

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)\,.dx + \varphi(y)$$

حيث: $\varphi(y)$ دالة تابعة لـــ y فقط ،

وبالتالي يجب علينا إيجاد الدالة $\varphi(y)$ من أجل تحقق الشرط السابق ، وبالتالي من أجل ذلك:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}.dx + \varphi'(y) = N(x,y)$$

ونعلم أنَّ:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.dx + \varphi'(y) = N(x,y)$$

$$N(x,y) - N(x_0,y) + \varphi'(y) = N(x,y) \Rightarrow N(x_0,y) = \varphi'(y)$$

$$\varphi'(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,.dy + c_1$$

$$\boxed{F(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y)\,.\,dx+\int_{y_0}^{y} N(x,y)\,.\,dy}$$

وهو الحل العام حيث (x_0,y_0) نقطة تنتمي إلى مجال تعريف الدالة.

وبالمثال يتضح المقال..

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\boldsymbol{x^2.dx+y^2.dy=0}$$

الحل: نبرهن أنها تامة:

$$\begin{cases} M(x,y)=x^2 \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial M}{\partial y}=0 \\ N(x,y)=y^2 \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial N}{\partial x}=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

ومنه فالشرط محقق إذاً المعادلة تامة.

لحلها نكتبها على شكل التكامل العام(ليست الطريقة العامة، بل حسب التعريف):

$$dF(x,y)=0\Rightarrow \frac{1}{3}(x^3+y^3)=0$$

فيكون الحل العام:

$$\boxed{\frac{1}{3}(x^3+y^3)=c}$$

ويمكن الحصول على الحل العام باستخدام الطريقة العامة وهي التي سنستعملها غالباً ، وتصلح دائماً في حالة المعادلات التفاضلية التامة ، لدينا:

$$F(x,y)=\int M(x,y)\,.\,dx+\varphi(y)=\int x^2\,.\,dx+\varphi(y)=\frac{x^3}{3}+\varphi(y)$$

نشتق بالنسبة لــ y:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=0+\varphi'(y)$$

نجعل:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) \Rightarrow \varphi'(y) = y^2 \Rightarrow \varphi(y) = \frac{y^3}{3} + c$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x,y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + c}$$

وهو الحل العام المطلوب.

انتهت المحاضرة ..