جبر خطي ١

الدكتورة: شغف زوربا

المحاضرة : الرابعة

التاريخ : ٢٠١٦/١٠/٢٣

إعداد : فاطمة + منى

محاضرة الجبر — جبر خطي (1) ٢٣/١٠/٢٠١٦م إعداد: [illegible] * [illegible]

«المصفوفات والمحددات»

*تعريف: نقول عن الشكل

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

أنها مصفوفة معرفة على الحقل F.

ومن الدرجة $m \times n$ (m سطر، n عمود) حيث $a_{ij} \in F$ عناصر من الحقل F

*نرمز للمصفوفات المعرفة على الحقل F من المرتبة $m\times n$ بالرمز: $M_{m\times n}$

أمثلة: ليكن الجدول التالي يعبر عن الساعات العملية التي يقوم بها الموظفين $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ في أيام الدوام الأسبوع:

	S	M	T	W	T
x_1	7	8	6	8	0
x_2	8	6	8	8	5
x_3	8	8	9	8	12
x_4	0	0	2	6	5
x_5	8	8	6	8	7

$$\Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 6 & 8 & 0 \\ 8 & 6 & 8 & 8 & 5 \\ 8 & 8 & 9 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 5 \\ 8 & 8 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix} \Longrightarrow A \in M_{5\times5}(\mathbb{R})$$

مثال ثاني: ليكن الطلاب (a, b, c, d, e) وعلاماتهم بالمواد رياضيات، الفيزياء، الكيمياء، الأحياء.

$$B = \begin{pmatrix} 56 & 60 & 55 & 66 & 29 \\ 30 & 28 & 15 & 21 & 15 \\ 19 & 12 & 13 & 16 & 12 \\ 21 & 32 & 35 & 16 & 11 \end{pmatrix}$$

ملاحظات هامة بتعريف المصفوفة:

1) نرمز للمصفوفة عادة بالرموز: $A, B, C, \ldots\ldots$

2) نرمز للأسطر بالرمز R_i حيث $i = 1, 2, \ldots m$

مثال: $R_i = \{a_{b1} \quad a_{b2} \quad a_{b3} \; \cdots\cdots \; a_{bn}\}$

3) نرمز للأعمدة بالرمز C_j حيث $j = 1, 2, \ldots n$

مثال:

$$C_1 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

(٤) نقول عن المصفوفة إنها مربعة إذا كان عدد الأسطر مساوياً لعدد الأعمدة أي $(m=n)$
نرمز لمجموعة المصفوفات المربعة من المرتبة $n\times n$ المعرفة على الحقل F بالرمز $M_n(F)$

(٥) نسمي العناصر $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots\dots, a_{nn}$ بعناصر القطر الرئيسي للمصفوفة (a_{ij})
عناصر المصفوفة التي من أجلها $i=j$

(٦) الحقول التي تستعملها المصفوفات في الجبر الخطي بشكل عام: $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$

أمثلة:

[1]

$$A_1=\begin{pmatrix} 3 & 2 & \pi \\ -2 & e & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

الحل:

$$A_1 \in M_{3\times3}(\mathbb{R}) \Longrightarrow M_3(\mathbb{R})$$

[2]

$$A_2=\begin{pmatrix} i & 3 \\ i-1 & 2+i \\ 6 & 0 \\ 5 & i \end{pmatrix}$$

الحل:

$$A_2 \in M_{4\times2}(\mathbb{C})$$

[3]

$$A_3=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{1\times4}(\mathbb{R})$$

وتدعى مصفوفة سطرية

[4]

$$A_4=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times1}(\mathbb{R})$$

تدعى مصفوفة عمودية

* مصفوفات خاصة:

1) المصفوفة السطرية: هي كل مصفوفة من الشكل $M_{1\times n}$
2) المصفوفة العمودية: هي كل مصفوفة من الشكل $M_{n\times 1}$
3) المصفوفة الصفرية: كل عناصرها هي صفر الحقل F حيث:

$a_{ij} = 0_I$ نرمز لها $\quad , \forall i = 1, \dots\dots m$
$j = 1, \dots\dots n$

4) المصفوفة القطرية: هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار ما عدا عناصر القطر الرئيسي ليست جميعها أصفار. مثال:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5) المصفوفة المثلثية الدنيا: هي مصفوفة مربعة قطرية فيها عناصر التي فوق القطر الرئيسي أصفار
أي $(a_{ij}=0$ من أجل $i<j)$

مصفوفة مثلثية دنيا:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6) المصفوفة السلمية: هي مصفوفة مربعة قطرية فيها عناصر القطر الرئيسي متساوية.

مثال:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

7) المصفوفة الواحدية: هي مصفوفة عناصر القطر الرئيسي فيها تساوي الواحد ونرمز لها بـ I_n

مثال:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8) المصفوفة المثلثية العليا: هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها التي تحت القطر الرئيسي أصفار أي

$a_{ij} = 0$ من أجل $i > j$

مثال:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9) المصفوفة المتناظرة: هي المصفوفة مربعة عناصرها متناظرة بالنسبة للقطر الرئيسي ... أي

$$a_{ij} = a_{ji}$$

مثال:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 5 & 0 & -1 \\ 7 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

*تعريف: لتكن (a_{ij}) وحيث $a_{ij} \in M_{m\times n}$ مصفوفة معرفة على الحقل F من المرتبة $(m\times n)$ نسمي التحويلات الآتية

1) المبادلة بين سطرين أو عمودين فيما بينها

2) ضرب سطر أو عمود في عنصر α بحيث $\alpha \neq 0$ من الحقل F.

3) جمع حاصل ضرب سطر أو عمود بعنصر لا يساوي الصفر مع سطر أو عمود آخر.

نسمي التحويلات السابقة بالتحويلات السطرية أو العمودية الأولية على مصفوفة (a_{ij})

نرمز للتحويلات السطرية الثلاث السابقة كما يلي:

1) $R_i \to R_j$

2) $\alpha \neq 0 ,\ R_i \to R_j$

3) $\alpha \neq 0 ,\ R_i \to R_i + \alpha R_j$

نرمز للتحويلات العمودية الثلاثة:

1) $C_i \to C_j$

2) $\alpha \neq 0 ,\ C_i \to \alpha C_j$

3) $\alpha \neq 0 ,\ C_i \to C_i + \alpha C_j$

صناعة سورية
Made in Syria
A-K

* **تعريف:** نقول عن مصفوفتين $A,B \in M_{m\times n}(F)$ إنهما متكافئتين سطرياً (عمودياً) إذا كان بالإمكان استنتاج إحداهما من الأخرى بتطبيق عدد منتهٍ من التحويلات السطرية (العمودية) على الأولى، ونرمز للتكافؤ بالرمز $\sim$

مثال للتوضيح:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \underset{R_2 \Leftrightarrow R_1}{\sim} B=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

انتهت المحاضرة

★ لا تنسونا من الدعاء ★