المحاضرة: الخامسة   التاريخ: 2016 / 10 / 17

في هذه المحاضرة قام الدكتور بذكر تفسير نتائج مسألة التدفق الأعظمي وذكر مسألة ساعي البريد الصيني ونشأتها (Post Man)

* تفسير نتائج مسألة التدفق الأعظمي:

نعلم أنه للحصول على جدول التدفق نقوم بطرح آخر جدول حصلنا عليه (الجدول الذي عموده الأخير كله أصفار) من الجدول الأساسي (الابتدائي أو الجدول) فنحصل على جدول يحوي قيم سالبة وقيم موجبة [عناصر العمود الأخير جميعها موجبة وعناصر العامود الأول جميعها سالبة]

ونلاحظ ما يلي:

1) مجموع عناصر العمود الأخير يمثل التدفق الأعظمي للشبكة.
2) الأرقام السالبة في العامود الأول تمثل النقص الحاصل في المصدر b_0 نتيجة التدفق.
3) الأرقام السالبة في الخانات الأخرى تمثل حاجة العقد البينية (حاجة كل عقدة من العقدة التي تسبقها)
4) مجموع عناصر العامود الأخير تساوي مجموع عناصر العامود الأول بالقيمة المطلقة.
5) المجموع وفق أي سطر يساوي صفر.
6) المجموع وفق أي عامود يساوي الصفر.

والبيان الموافق للجدول نسميه بيان التدفق ☺

- ملاحظة: إذا لم يتحقق 4) و 5) و 6) في الجدول الأخير (جدول التدفق) يكون هناك خطأ في خطوات حل التمرين وعلينا مراجعته ☹.

نلاحظ في تمرين المحاضرة الثالثة جدول التدفق الذي حصلنا عليه هو:

	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
b_0		8	9	5		
b_1	-8				8	
b_2	-9			5		4
b_3	-5		5	0		10
b_4						8
b_5			-4	-10	-8	

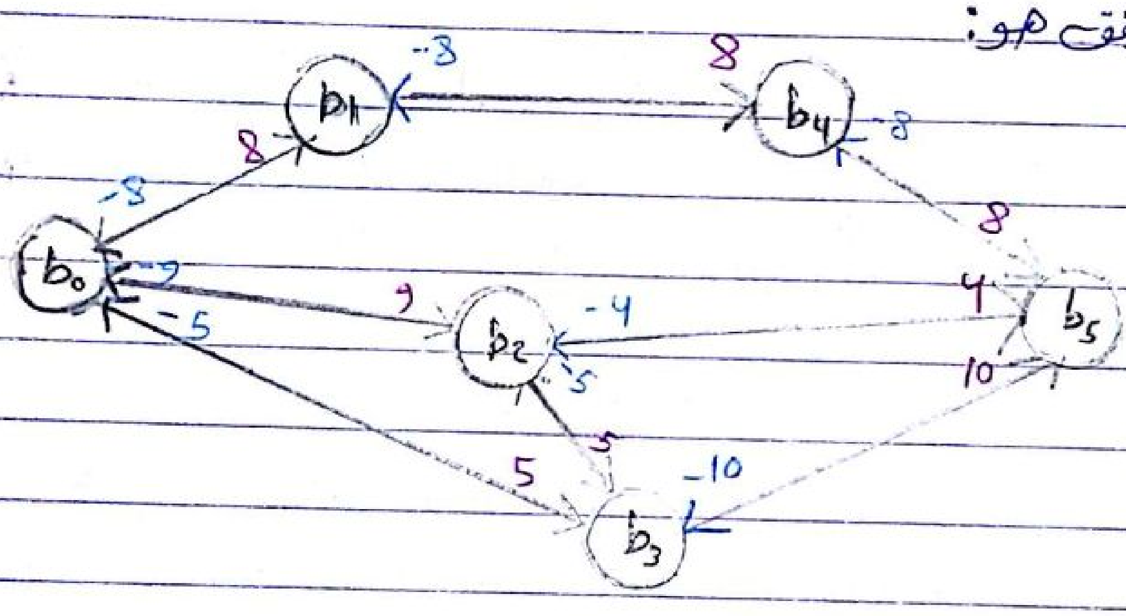
ونلاحظ في الجدول أن:

مجموع عناصر العامود الأخير هو التدفق الأعظمي $4+10+8=22$

مجموع قيم العامود الأول بالقيمة المطلقة تساوي مجموع قيم العامود الأخير

المجموع على أي سطر عدا الأول والأخير يساوي الصفر

ويكون بيان التدفق هو:



والآن سننتقل للحديث عن مسألة ساعي البريد الصيني:

ساعي البريد: هي عملية حمل الرسائل من مكتب البريد وينطلق بها إلى أصحابها ثم يعود بها إلى مكتب البريد، أي يجب أن يغطي الشوارع التي يوجد بها الأشخاص الذين لهم رسائل من

طُرحت هذه المسألة عام 1962 من قبل العالم الصيني Kuuam.

حيث عُرف بيان موزون وعُرف عقد هذا البيان والأقواس الواصلة بين هذه العقد تمثل أضلاع البيان وهذه المسألة تهدف إلى:

إيجاد أصغر مسار ممكن بحيث يتمكن ساعي البريد من تأدية مهمته بأقل وقت ممكن.

لحل هذه المسألة نوجد البيان الموزون لمنطقة عمل ساعي البريد حيث وزن أضلاع هذا البيان تمثل الزمن اللازم لإنجاز مهمته في مسار محدد (أوزان البيان يجب أن تكون أعداد موجبة)

* وبشكل عام إذا كان لدينا البيان الموزون G ومجموعة عقده V ومجموعة أضلاعه E.

بحيث تكون أضلاعه موزونة ويكون المطلوب هو إيجاد أصغر مسار ويكون من ميزات هذا المسار أن مجموع أوزان الأضلاع التي تربط بين عقدتين أصغري

$\sum w(e_i)$ minmal

ونسميها عمليا أصغر دورة

المحاضرة: السادسة   التاريخ: 2016/10/11م

في هذه المحاضرة سنكمل الحديث عن مسألة ساعي البريد الصيني وسنذكر مثال يوضحها وذكر برهنة وإثباتها ☺

وحل مسألة ساعي البريد يتم لدينا أن:
الدائرة التي نبحث عنها لحل المسألة هي دائرة أويلر الأصغرية ودائرة أويلر الأصغرية هي دائرة لا تسمح بتكرار العقد.

دائرة أويلر: هي دائرة تمر بجميع عقد البيان وأضلاعه دون تكرار أضلاعه.

البيان الأويلري: يكون البيان هو بيان أويلر إذا حوى دائرة أويلر.
بيان نصف أويلر: نقول عن البيان G أنه بيان نصف أويلر إذا وجد طريق تحوي جميع أضلاع وعقد البيان.
ملاحظة:
لا توجد خوارزمية فعالة ذات كلفة معقولة تمكن من إيجاد مسار أويلر في بيان ما، ولكن توجد خوارزمية تمكن من إيجاد مسار أويلر من أي بيان وضعت من قبل Fleury عام 1979

تذكرة: إذا كان البيان هو بيان أويلر فإن درجات جميع العقد ستكون زوجية.
خطوات خوارزمية Fleury Alg لإيجاد دائرة أويلر الأصغرية:
ليكن لدينا البيان $G(V, E)$ حيث $V = \{v_1, v_2 ... v_n\}$ مجموعة العقد
ومجموعة الأضلاع: $E = \{e_1 ..... e_m\}$
ولدينا عدد العقد هو: $|V| = n$ وعدد الأضلاع هو $|E| = m$.

1) الخطوة الأولى:
نختار عقدة عشوائية ولتكن v_1 حيث يكون الممر $W_1 = \{v_1\}$

تذكرة: والممر هو متتالية من العقد والأضلاع لا تتكرر فيه العقد ولا الأضلاع
المسار: هو متتالية من العقد والأضلاع يسمح فيه بتكرار العقد والأضلاع

SABBAGH STATIONERY

2) الخطوة الثانية:

نفرض أنه تم اختيار الطريق أو المسار: $W_i = \{v_1, e_1, v_2 \ldots e_{i-1}, v_i\}$

عندئذٍ نختار الضلع $e_i \longrightarrow v_i$ وبالتالي نوجد البيان:

$$G_{i-1} = \{G - \{e_1, e_2, \ldots e_{i-1}\}$$

وضلع القطع: هو ضلع إذا حذفناه نحصل على بيان غير مترابط.

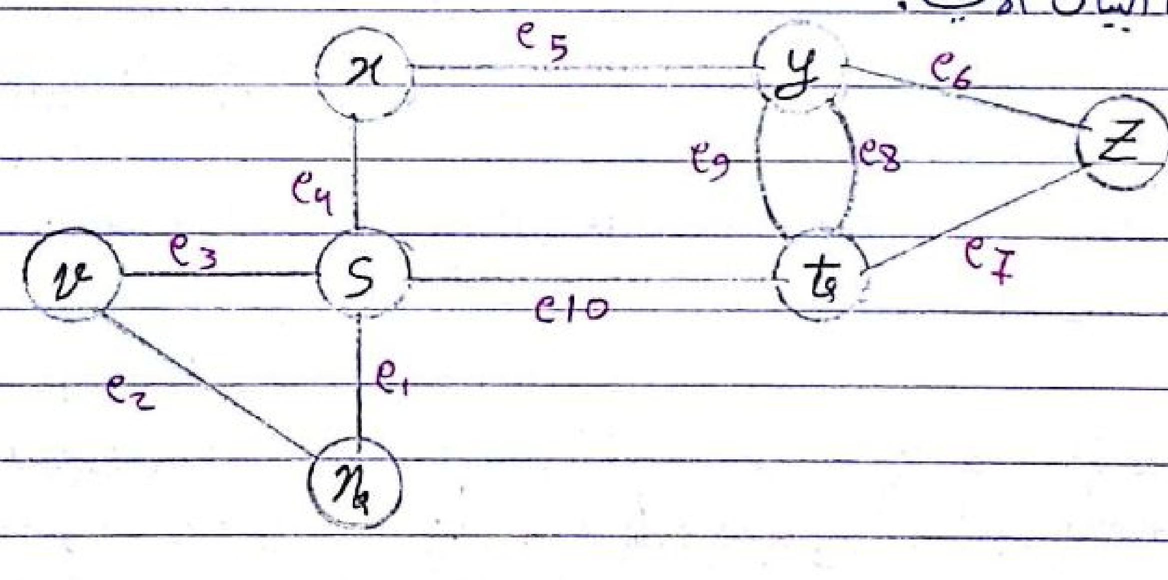
وهنا لدينا e_i ضلع ليس جسراً "[أي عندما نختار e_i نختاره بحيث لا يكون جسراً، أما إذا لم يكن هنالك سوى ضلع واحد يؤدي إلى العقدة وهو جسر فإننا نختاره] ، إذا لم يكن هناك خيار آخر.

3) الخطوة الثالثة:

نتوقف عندما لا نستطيع تكرار الخطوة السابقة.

☺ سنوضح استخدام الخوارزمية من خلال المثال الآتي:

ليكن لدينا البيان الآتي:



الحل:

أولاً نختار العقدة v ونلاحظ أنه يؤدي إلى العقدة v الأضلاع: $\{e_2, e_3\}$

نختار e_3 فيكون لدينا المسار $W_2 = \{v, e_3, s\}$ (بعد أن نختار الضلع نستثنيه من البيان)

$$G_1 = G - \{e_3\}$$

- يؤدي إلى العقدة s الأضلاع $\{e_1, e_4, e_{10}\}$ (لم نأخذ e_1 لأنه جسر)

نختار أحد الضلعين e_4 أو e_{10} فنختار e_{10} ويصبح لدينا:

$$W_3 = \{v, e_3, s, e_{10}, t\}$$

$G_2 = G - \{e_3, e_{10}\}$

- يؤثر في العقدة t الأضلاع $\{e_7, e_8, e_9\}$ نختار الضلع e_7 فيصبح لدينا:

$W_4 = \{v, e_3, s, e_{10}, t, e_7, z\}$

$G_3 = G - \{e_3, e_{10}, e_7\}$

- يؤثر في العقدة z الضلع e_6 وهو جسر وليس هناك خيار آخر لذلك في هذه الحالة سنختار الضلع e_6 فيكون لدينا:

$W_5 = \{v, e_3, s, e_{10}, t, e_7, z, e_6, y\}$, $G_4 = G - \{e_3, e_{10}, e_7, e_6\}$

- يؤثر في العقدة y الأضلاع $\{e_5, e_8, e_9\}$ نختار الضلع e_8 فيكون لدينا:

$W_6 = \{v, e_3, s, e_{10}, t, e_7, z, e_6, y, e_8, t\}$

$G_5 = G - \{e_3, e_{10}, e_7, e_6, e_8\}$

- يؤثر في العقدة t الضلع e_9 (ولا نأخذ e_7, e_8, e_{10} لأننا اخترناهم سابقاً)

$W_7 = \{v, e_3, s, e_{10}, t, e_7, z, e_6, y, e_8, t, e_9\}$

$G_6 = G - \{e_3, e_{10}, e_7, e_6, e_8, e_9\}$

- يؤثر في العقدة y الضلع e_5 نختاره فيكون لدينا:

$W_8 = \{v, e_3, s, e_{10}, t, e_7, z, e_6, y, e_8, t, e_9, y, e_5, x\}$

$G_7 = G - \{e_3, e_{10}, e_7, e_6, e_8, e_9, e_5\}$

- يؤثر في العقدة x الضلع e_4 فيكون لدينا:

$W_9 = \{v, e_3, s, e_{10}, t, e_7, z, e_6, y, e_8, t, e_9, y, e_5, x, e_4, s\}$

- يؤثر في العقدة s الضلع e_1 نختاره [أثناء الاختيار نستثني الأضلاع التي اخترناها سابقاً ولا نعود لاستخدامها]

$W_{10} = \{v, e_3, s, e_{10}, t, e_7, z, e_6, y, e_8, t, e_9, y, e_5, x, e_4, s, e_1, u\}$

$G_9 = G - \{e_3, e_{10}, e_7, e_6, e_8, e_9, e_5, e_4, e_1\}$

- يؤثر في العقدة u الضلع e_2 نختاره فيصبح لدينا:

$W = \{v, e_3, s, e_{10}, t, e_7, z, e_6, y, e_8, t, e_9, y, e_5, x, e_4, s, e_1, u, e_2, v\}$

لم يعد بإمكاننا استخدام الخوارزمية فنتوقف ☺ - وانتهى الحل

+ هذه الدائرة هي دائرة أويلر وذلك لاحظ أنه لم يتم تكرار أي ضلع وكررنا بعض العقد

+ هذه الخوارزمية تمكننا من إيجاد جميع دوائر أويلر التي تحوي جميع أضلاع البيان دون تكرار وتحوي جميع عقد البيان

- إذا لم يكن البيان هو بيان أويلر فيجب تحويل البيان إلى بيان أويلر ثم استخدام الخوارزمية السابقة.

مبرهنة:

ليكن G هو بيان أويلر ولتكن C هي دارة تم إنشاؤها وفق خوارزمية Floury عندئذٍ فإن الدارة C هي دارة أويلر.

+ الإثبات

شرح: في هذه البرهنة يجب أن نثبت أن خوارزمية فلوري تمكننا من الحصول على دارة أويلر
نلاحظ وضوحاً أن خوارزمية فلوري تعود بالنهاية إلى إغلاق دارة عند آخر عقدة
وتكون درجتها مساوية (1)، والهدف الأول هو أن لا يكون أي ضلع يقع خارج الدارة.
ولنثبت أن هذه الدارة هي دارة أويلر أي أنها تمر على كل ضلع مرة واحدة فقط. ويكون
من الملاحظ أن خوارزمية فلوري لا تكرر الأضلاع. إذاً الدارة هي دارة أويلر

- لتكن C هي الدارة التي تم إنشاؤها باستخدام خوارزمية فلوري:

$$C = \{ v_1 , e_1 \ldots\ldots e_{n-1} , v_n \}$$

العقدة v_n هي عقدة درجتها تساوي ??? وتساوي درجة العقدة v_1، أي أن
المسار C هو مسار مغلق، ولنثبت أن المسار C يحوي جميع أضلاع البيان دون تكرار
نلاحظ حسب بنية خوارزمية فلوري فإنه لا يتم تكرار أي ضلع وذلك كوننا
نحذف الضلع في كل خطوة نقوم بها.
ولنثبت أن الدارة C تحوي جميع عقد البيان.

- لنفرض أن المجموعة $\$$ هي مجموعة العقد التي درجتها أكبر من الصفر أي أنه:

~~ولنفرض أن $\emptyset \ne \$ \subseteq G_n$~~ $\qquad \forall \ell \in \$: \deg(\ell) > 0$

ولنفرض أن $\emptyset \ne \$ \subseteq G_n$ وذلك لأن البيان في الأساس هو بيان مترابط (فرض جدلي)

نعرف المجموعة $\bar{\$}$ (المجموعة المتممة لـ $\$$) : $\quad \bar{\$} = V \setminus \$$

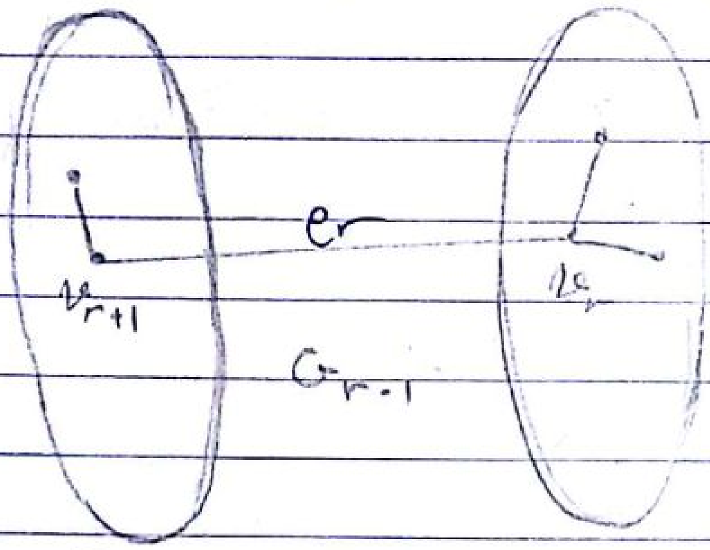
($\bar{\$}$ هي مجموعة جميع العقد عدا عقد المجموعة $\$$)

[توقف في قسم عشوائي لعقد البيان فإن عقد المجموعة $\$$ ستستمر مختار الخوارزمية صحيحة لأرقام
العقد $\$$ ولتكن r أي v_r وبالتالي يكون $v_{r+1} \in \bar{\$}$ (يشير للمجموعة المتممة)

- يوجد عدد صحيح r بحيث يكون:

$$\exists r \in \mathbb{Z}^+ ; v_r \in \$ \wedge v_{r+1} \in \bar{\$}$$

بما أن المسار C ينتهي في المجموعة $\bar{S}$ عندئذٍ يوجد ضلع وحيد e_r يربط بين المجموعتين $\bar{S}$ و S وفق الشكل التالي:



عندئذٍ الضلع e_r موجود في البيان G_{r-1} ~~...~~ حيث أن درجة العقدة v_r أكبر من الصفر أي: $\deg(v_r) > 0$ والضلع e_r موجود في البيان G_{r-1} ويؤثر على هذه العقدة، وينتج من الخطوة الثانية في الخوارزمية أن e_r يجب أن يكون ضلع قطع في البيان G_{r-1}، والبيان G_r المولد بالمجموعة S ($G[S]$) هو بيان جزئي من البيان G_n إذاً الضلع e_r هو ضلع قطع في البيان G_{r-1}، ومنه فإن الضلع e_r هو ضلع قطع في البيان G_r، ونستنتج أن $G_r[S] = G_n[S]$ إذاً كل عقدة في البيان G_r المولد بالمجموعة S ذات درجة زوجية وهذا يعني أن البيان G_r لا يحوي ضلع قطع (لا يملك جسر) وهذا تناقض ومنه فإن الفرض الجدلي خاطئ

— انتهى البرهان —

ملاحظة:

إذا كان البيان أويلري فإننا نطبق الخوارزمية (خوارزمية فلوري مباشرة) أما إذا لم يكن أويلري فإننا نحوله إلى بيان أويلري ثم نطبق الخوارزمية

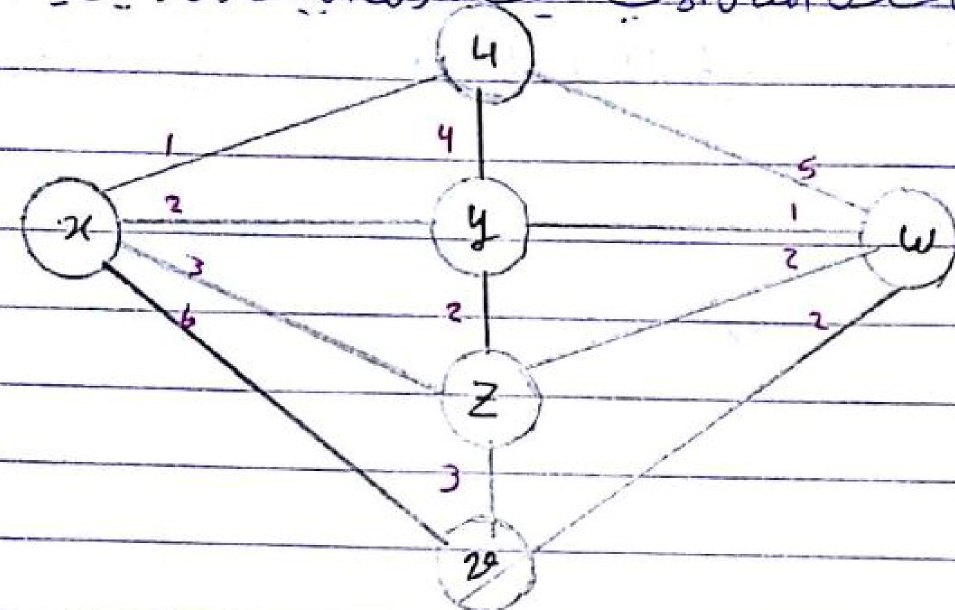
* تحويل البيان غير أويلري إلى بيان أويلري:

ليكن لدينا البيان $G(V,E)$ وهو بيان ليس أويلري [أي أنه في هذا البيان يجب أن نمر على نفس الضلع أكثر من مرة]

ولتحويله إلى بيان أويلري نقوم بمضاعفة الأضلاع ذات الكلفة الأصغرية $\text{Min} \sum_e w(e)$

ثم نوجد الدارة الأويلرية ☺

سنوضح من خلال المثال الآتي كيف حولنا البيان غير أويلري إلى أويلري:



نلاحظ أن الطريق الممكن في هذا البيان حيث يغطي جميع الأضلاع والعقد هو:

$\{x, u, y, w, v, z, w, y, x, u, w, v, x, z, y, x\}$

وهو الطريق الأمثل أي الدارة الأمثل optimal route .

بالملاحظ في هذه الحالة أن نكرر (نضاعف) بعض أضلاع البيان والأضلاع المضاعفة تأخذ نفس الوزن عندئذ سنضاعف في البيان السابق:

(u, x) , (x, y) , (y, w) , (v, w) ولهم نفس الوزن

نحصل على بيان يمكن أن نوجد فيه دارة أويلر في هذا البيان الجديد

وأصبحت مسألة ساعي البريد صياغتها على الشكل التالي:

أولاً: إيجاد بيان أويلر G^* انطلاقاً من البيان G وذلك من خلال مضاعفة بعض الأضلاع بحيث يتحقق ما يلي:

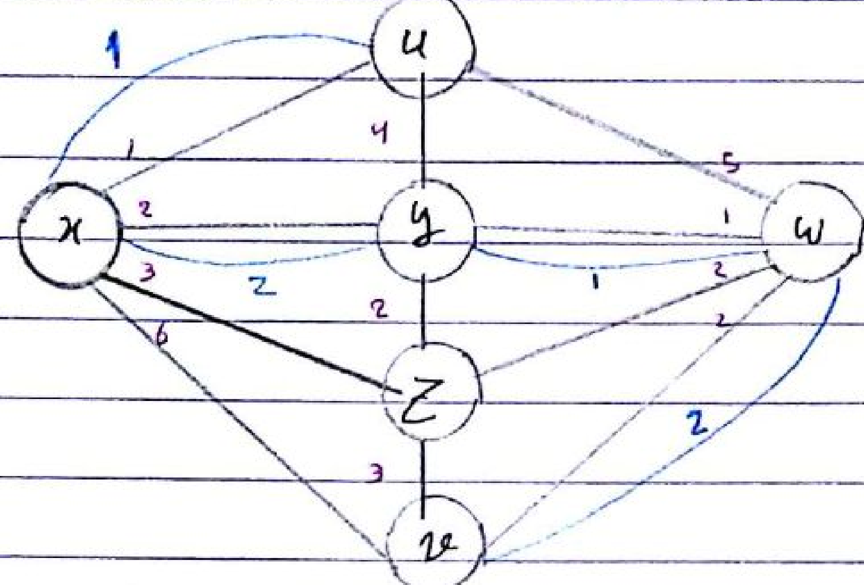
$$\left(\sum_{e \in E[G^*] \setminus E[G]} (w(e)) \right) \quad \text{Minmal}$$

حيث $w(e)$ تمثل وزن الضلع.

أي أننا كررنا الأضلاع التي يكون مجموعها أصغر ما يمكن وبالتالي نحصل على G^* بيان أويلر

ثانياً: نطبق خوارزمية floury لإيجاد دارة أويلر في هذا البيان

سنوضح الآن كيف تتم مضاعفة الأضلاع حتى نحصل على G^* بيان أويلر.



إذا كانت جميع العقد زوجية فإن البيان هو بيان أويلر.
وهنا نجد أن البيان ليس بيان أويلر لأنه توجد عقدتين فرديتين على الأقل وهما
u و v (الوصل بين u و v ضلع مباشر يكفي أن نضاعف هذا الضلع ولكن في
حالتنا لا يوجد ضلع مباشر بين هاتين العقدتين) لذلك نبحث عن طريقة لمضاعفة
بعض الأضلاع بحيث نحصل على بيان أويلر.

1) نبدأ من إحدى العقدتين الفرديتين u أو v ، ونبدأ من u ، ونؤكد على العقدة
u ثلاث أضلاع، نضاعف من u إلى x.

2) نؤكد على x ثلاث أضلاع نضاعف من x إلى y ، ونؤكد في y
ثلاث أضلاع نضاعف من y إلى w ، ثم من w إلى v.

تمكنا الآن من إيجاد G^* وهو بيان أويلر بحيث يتحقق الشرط الأصغرية:

$$\sum_e w(e) = \underset{(u,x)}{1} + \underset{(x,y)}{2} + \underset{(y,w)}{1} + \underset{(w,v)}{2} = 6$$

قد يسأل البعض لماذا لم نضاعف مباشرة من u إلى x ثم من x إلى v والجواب
ببساطة لأننا لم نتمكن من تحقيق شرط الأصغرية لأنه يكون:

$$\sum_e w(e) = \underset{(u,x)}{1} + \underset{(x,v)}{6} = 7$$

في المحاضرة القادمة سنتكلم عن دوائر هاملتون ومسألة البائع الجوال.

☺ انتهت المحاضرة السادسة ☺

كتابة: نور طاهر