محاضرة 2 4/10/2016

تتمة طرائق العد

3. حالة خاصة: إذا كان لدينا تجربة عدة نتائجها هو N وكررنا التجربة n مرة بشكل مستقل في كل مرة عن الأخرى فإن عدد النتائج الكلية هو:

$$\boxed{|\Omega| = N^n}$$

مثال: دراسة توزع الذكور لدى أسرة تملك ثلاث أطفال

يكون $|\Omega| = 2^3 = 8$

حيث:

$$\Omega = \{BBB, BBG, BGB, GBB, GGB, GBG, BGG, GGG\}$$

ملاحظة: في حالة تجربة ثنائية (لها ناتجان) وكررنا التجربة n مرة بشكل مستقل فإن عدد النتائج الممكنة هو: $|\Omega| = 2^n$

4. العينات المرتبة:

إذا كانت A مجموعة غير خالية وكان $r \in N^*$ فإن كل عنصر من A^r يُدعى عينة مرتبة من الحجم r $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ مأخوذة من المجموعة A ويكون عدد العينات المرتبة:

أ] في حالة $|A| = n$ والسحب r مرة متتالية مع الإعادة هو

$$\boxed{|\Omega| = |A^r| = n^r}$$

مثال: بكم طريقة يمكن أن نوزع n كرة على n صندوق

الحل: $|\Omega| = n^n$

ب] في حالة السحب r مرة متتالية دون إعادة $(r \leq n)$ هو:

$$|\Omega| = n \times (n-1) \times \dots \times (n-r+1)$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!} = P_r^n$$

العناصر هنا مختلفة عن بعضها وندعوه نسقاً من الحجم r مأخوذ من A

5. الترتيب: ((مشابهة للحالة ب))

يدعى ترتيب r من الأشياء المتمايزة (المختلفة) متبادلة حيث نفرض أنه لدينا n شيئاً متمايزاً ونريد اختيار r شيئاً منها ثم ترتيبها في متبادلة فيكون عدد الطرق الكلية للقيام بهذا الترتيب:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

عندما $r = n$ أي ترتيب عناصر المجموعة بأكملها يكون عدد الطرق

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

مثال: لدينا مرجع مؤلف من ستة أجزاء، نريد ترتيبه على أحد رفوف المكتبة ولكن لا يتوفر سوى أربعة أماكن، فبكم طريقة يمكن شغل هذه الأماكن:

الحل: $P_4^6 = \frac{6!}{(6-4)!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ طريقة

6. التوافيق: إذا كان لدينا مجموعة A مؤلفة من n عنصر وأردنا اختيار مجموعة جزئية مؤلفة من $r \leq n$ عنصر أي (لا يقتضي أن نأخذ ترتيب العناصر في أي نشاط)

فنقول عندئذٍ أن ذلك يدعى متوافقة حجمها r، مأخوذة من A ونرمز له بـ:

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال: إن عدد اختيار ثلاث كتب من سبعة كتب لوضعها على رف هو:

$$C_3^7 = \frac{7!}{3!\,4!} = 35$$

ملاحظات: ((حول الترتيب والتوافيق))

① اصطلاحاً نضع: $1! = 1 \quad , \quad 0! = 1$

② بسهولة نجد أن:

$$C_0^n = 1 \quad , \quad C_n^n = 1$$

$$C_1^n = n \quad , \quad C_{n-1}^n = n$$

③ بالحساب نجد:

$$C_r^n = C_{n-r}^n$$

$$C_r^{n+1} = C_r^n + C_{r-1}^n$$

7. إن عدد الطرائق التي يمكن تقسيم n شيئاً متمايزاً إلى قسمين أحدهما يتضمن n_1 شيئاً والآخر n_2 حيث $n_1 + n_2 = n$ هو:

$$C_{n_1, n_2}^n = C_{n_1}^n = C_{n_2}^n = \frac{n!}{n_1!\,n_2!}$$

كما في المثال السابق:

$$C_{3\;4}^7 = C_3^7 = C_4^7 = \frac{7!}{3!\,4!}$$

تمرين: بكم طريقة يمكن اختيار ثلاث طالبات من مجموعة تحوي 5 طالبات

الحل: عدد الطرق الممكنة لاختيارهم هو:

$$C_3^5 = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$$

فضاء العينة يمكن أن يكون:

- منتهٍ (حجر النرد $\Omega = 1,2,3,4,5,6$)
- غير منتهٍ وغير قابل للعد (اختيار نقطة من المجال $[0,1]$)
- غير منتهٍ ولكن قابل للعد (رمي حجر نرد حتى الحصول على الرقم 1)

تعريف: إذا كانت Ω مجموعة غير خالية وكان F صفاً غير خالٍ من أجزاء Ω أي أن $F \subseteq P(\Omega)$ ((مجموعة) مجموعات)

نقول عن F أنه يشكل جبر على Ω إذا تحققت الشروط:

I- $\Omega \in F$

II- $A \in F \Rightarrow A' \in F$ (مغلق بالنسبة لعملية الإتمام)

III- $A, B \in F \Rightarrow A \cup B \in F$ (مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع)

تعريف: إذا كان F جبراً على Ω وحقق الشرط التالي:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \in F \Rightarrow \bigcup_{n \geq 1} A_n \in F$$

(مغلق بالنسبة للاجتماع المعدود)

عندئذٍ نقول عن F أنه جبر تام على Ω أو (σ - جبر على Ω)

نتائج: 1- إذا كان F جبراً على Ω فإن:

أ) $\emptyset \in F$

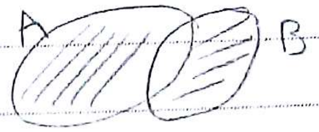
ب) $A, B \in F \Rightarrow A \cap B \in F$

البرهان: $A \cap B = (\underbrace{\underset{\in F}{A'} \cup \underset{\in F}{B'}}_{\in F})' \in F$ A' و B' ينتميان إلى F

ج) $A, B \in F \Rightarrow \overset{A \cap B'}{\widehat{A \setminus B}} \in F$

ح) $A, B \in F \Rightarrow A \Delta B \in F$

الفرق التناظري $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$



هـ) F مغلق بالنسبة للاجتماع المنتهي

و) F = = للتقاطع المنتهي

ز) تقاطع الجبور هو جبر

$F_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ الجبر التافه (أحياناً)

$F_2 = \{\emptyset, \Omega, A, A'\}$ جبر وجبر تام

2- إذا كان F جبراً تاماً على Ω فإنه إضافةً إلى النتائج السابقة يحقق ما يلي: أ) F مغلق بالنسبة للتقاطع المعدود.

ب) كل جبر تام هو جبر لكن العكس ليس صحيح

ج) كل جبر منته هو جبر تام.

د) تقاطع الجبور التامة هو جبر تام.

تعريف الجبر (الجبر التام) المولد بـ F: هو أصغر جبر (جبر تام) يحوي F وهو تقاطع جميع الجبور التي تحوي F ونرمز له $\sigma(F)$

تعريف: إن الجبر التام الذي يولده صف المجالات المحدودة على R يدعى جبر بوريل ونرمز له بـ R_1 أو $B(R)$ وكل مجموعة منتمية إلى R_1 تدعى مجموعة بوريلية.

أمثلة:

أ- $P(\Omega)$ هو جبر وجبر تام على Ω

ب- $F = \{\emptyset, \Omega\}$ جبر وجبر تام على Ω

ج- المجالات المفتوحة من R ليست جبراً ولا جبراً تاماً على Ω

- إذا كانت $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ و

$$F = \{\emptyset, \{1\}, \{4\}, \{2,3\}, \{1,4\}, \{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\} = \Omega\}$$

فإن F جبر وجبر تام على Ω

تعريف: إذا كانت Ω مجموعة غير خالية و F جبراً تاماً على Ω (من أجزائها) فإن الثنائية (Ω, F) تدعى فضاءً مقيساً
وندعو كل عنصر من العناصر F مجموعة مقيسة.

* نتيجة: Ω ، $\emptyset$ مجموعات مقيسة.

تعريف: ليكن (Ω, F) فضاءً مقيساً، نقول عن الدالة

$$M : F \longrightarrow \overline{R}_+ = [0, +\infty]$$ حسب نظرية القياس من المهم أن يكون مغلق عند الصفر

أنها تمثل قياساً على F إذا حققت ما يلي:

1 - $M(\emptyset) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \forall A_1, A_2, \ldots \in F ; \\ i \neq j \quad A_i \cap A_j = \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow M\left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right) = \sum_{i \geq 1} M(A_i)$$

تعريف: ندعو الثلاثية (Ω, F, M) فضاء القياس M

حالة خاصة: عندما $M(\Omega) = 1$

ندعو M قياساً احتمالياً أو احتمال ونرمز له هنا P والثلاثية (Ω, F, P) فضاء القياس الاحتمالي P أو الفضاء الاحتمالي (اختصاراً).

انتهت المحاضرة الثانية