مبرهنة تايلور (نشر تايلور المحدود): لتكن $\lambda(t)$ دالة من الصف C_{n+1} عند t_0 "أي في جوار t_0 أي المشتقات حتى المرتبة $n+1$ في جوار t_0 مستمرة" عندئذٍ:

$$\lambda(t_0+h)=\lambda(t_0)+\frac{h}{1!}\lambda'(t_0)+\frac{h^2}{2!}\lambda''(t_0)+\dots+\frac{h^n}{n!}\lambda^{(n)}(t_0)+R_{n+1}(t_0,h)$$

أو تكتب بالشكل:

$$\lambda(t)=\lambda(t_0)+\frac{(t-t_0)^1}{1!}\lambda'(t_0)+\frac{(t-t_0)^2}{2!}\lambda''(t_0)+\dots+\frac{(t-t_0)^n}{n!}\lambda^{(n)}(t_0)$$

$$+R_{n+1}(t_0,t)$$

حيث في حالة شكل الأول يكون:

$$R_{n+1}=o(h^n) \text{ في جوار } h=0 \;\Big\{\; \lim_{h\to 0}\frac{R_{n+1}}{h^n}=0$$

نهاية لامتناهية في الصغر

ويكون في حالة شكل الثاني:

$$R_{n+1}=o((t-t_0)^n) \text{ في جوار } t_0 \;\Big\{\; \lim_{t\to t_0}\frac{R_{n+1}}{(t-t_0)^n}=0$$

يسمى هذا المجموع بالنشر المحدود لتايلور من درجة n لدالة λ في جوار t_0.

* لـ R_{n+1} صيغ عدة نذكر منها:

1) $R_{n+1}=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\lambda^{(n+1)}(t_1)$

حيث t_1 محصورة بين t_0 و t_0+h.

2) $R_{n+1}=$

الدوال الحقيقية التحليلية، تكون دالة حقيقية $\lambda(t)$ تحليلية على مجال مفتوح I إذا وجد من أجل كل t_0 من المجال I، عدد $\delta>0$ بحيث يتحقق:

$$(*)\quad \lambda(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-t_0)^n \qquad \forall t\in]t_0-\delta, t_0+\delta[$$

أي أن هذه المتسلسلة (متسلسلة قوى) متقاربة على كل t من مجال سابق، ومجموعها $\lambda(t)$.

* تكون الدالة الحقيقية تحليلية على مجال مفتوح إذا أمكن كتابتها على ضمن هذا المجال كمتسلسلة قوى.
* نقول عن دالة $\lambda(t)$ إنها تحليلية في t_0 إذا كانت تحليلية في جوار له، أي إذا أمكن كتابة $\lambda(t)$ كمتسلسلة قوى متقاربة في جوار t_0.

نرمز لصنف الدوال تحليلية بـ C^{ω} أو C_A.

- إن الدوال: كثيرات الحدود، التوابع المثلثية $(\cos)$ $(\sin)$ ومنها الدوال الأسية جميعها دوال تحليلية أي من صنف C_ω على I، كما أن حاصل قسمة دالتين تحليليتين ستكون دالة تحليلية على أي مجال لا يحوي أي نقطة تعدم المقام.

الدالة الأسية دالة تحليلية كالآتي:

$$e^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}=1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\dots+\frac{t^n}{n!}+\dots \qquad \forall t\in \mathbb{R}$$

وهنا نشرح في جوار الصفر $t_0=0$

$$e^t=e^{t-t_0+t_0}=e^{t_0}\cdot e^{t-t_0}=e^{t_0}\Big(1+(t-t_0)+\frac{(t-t_0)^2}{2!}+\dots+\frac{(t-t_0)^n}{n!}+\dots\Big)$$

$$=e^{t_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^n}{n!} \qquad \forall t\in R$$

مبرهنة: إذا كانت $\lambda(t)$ تحليلية عند t_0 فإن λ مستمرة من الصنف C_∞ وأكثر من ذلك فإن:

$$a_n = \frac{\lambda^{(n)}(t_0)}{n!} \quad \forall n \geq 0$$

وذلك في (*)

أي أن $\lambda(t)$ تكون مساوية لمتسلسلة تايلور لها في جوار $t = t_0$ أي:

$$\lambda(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!} \lambda^{(n)}(t_0)$$

والنشر هو وحيد والعكس غير صحيح.

ملاحظة: ← يمكن أن نبرهنها

أصبح الاحتواء $C_\infty \subset C$ صحيح إلا أن العكس غير صحيح أي يوجد دالة من صنف C_∞ ولكن ليست تحليلية.

* يعرف مفهوم الدالة المتجهية العددية التحليلية كما في حالة دوال حقيقية أي $\vec{r}$ تحليلية على مجال مفتوح I إذا وجد من أجل كل t_0 من المجال I عدد $\delta > 0$ بحيث يتحقق:

$$\vec{r}(t) = \sum \vec{a}_n (t-t_0)^n \quad \forall t \in]t_0-\delta, t_0+\delta[$$

ويمكن بيان بعض الخواص فيما يلي:

1- $\vec{r}(t)$ تحليلية عند t_0 فإنها مستمرة من الصنف C_∞ عند t_0 كما أن: $\vec{a}_n = \frac{\vec{r}^{(n)}(t)}{n!}$

2- $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ تحليلية $\Longleftrightarrow$ جميع المركبات x, y, z تحليلية

مثال: $\vec{r}(t) = (e^t, \cos t, \sin t)$

دالة متجهية تحليلية على $\mathbb{R}$ لأن $\sin t, e^t, \cos t$

دوال حقيقية تحليلية على $\mathbb{R}$.

الكتابة المنشور:

$$\vec{r}(t) = \underbrace{(1,1,0)}_{\vec{a}_0} + \underbrace{(1,0,1)}_{\vec{a}_1} t + \underbrace{\left(\frac{1}{2!}, \frac{-1}{2!}, 0\right)}_{\vec{a}_2} t^2$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{3!}, 0, \frac{-1}{3!}\right)}_{\vec{a}_3} t^3 + \text{—} + \left(\frac{1}{n!}, \quad , \quad \right) t^n + \text{—}$$

C_{n+1} من الصف

النشر المحدود لتايلور لدالة متجهية العيقة في جوار نقطة t_0:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \frac{(t - t_0)}{1!} \vec{r}'(t_0) + \text{—} + \frac{(t - t_0)^n}{n!} \vec{r}^{(n)} + \vec{R}_{n+1}(t, t_0)$$

حيث

$$\vec{R}_{n+1}(t, t_0) = o\left((t - t_0)^n\right)$$ في جوار $t = t_0$

أي يعني:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\vec{R}_{n+1}}{(t - t_0)^n} = \vec{0}$$

صيغ $\vec{R}_{n+1}$:

مشتق من مرتبة $n+1$

1) $$\vec{R}_{n+1} = \frac{(t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!} \vec{r}^{(n+1)}(t_1)$$

حيث t_1 محصورة بين t_0 و t

2) $$\vec{R}_{n+1} = (t - t_0)^{n+1} \cdot \vec{U}(t, t_0)$$

حيث $\vec{U}(t, t_0)$ محدود في جوار $t = t_0$

التمثيلات الوسيطية: نسمي أي دالة متجهية القيمة $\vec{r}$ من مجال I إلى $\mathbb{R}^3$ (إلى فضاء المتجهات) تمثيلا وسيطيا نرمز له اختصارا بـ $(I, \vec{r})$

مطلق — دالة متجهية قيمة

ونسمي متحول الدالة $\vec{r}$ وسيط التمثيل كما نسمي مجموعة النقاط « $\{P \in \mathbb{R}^3 : \vec{OP} = \vec{r}(t) \wedge t \in I\}$ » بالمجموعة النقطية لتمثيل $\vec{r}$ وهي رؤوس متجهات القيم لهذه الدالة $\vec{r}$.

* لنكن $P \in \mathbb{R}^3$ ولنأخذ $\vec{r}^{-1}(\vec{OP})$ أي $\vec{r}^{-1}(\{\vec{OP}\})$ الصورة العكسية لـ $\vec{OP}$ ولنميز الحالات التالية:

1) $\vec{r}^{-1}(\vec{OP}) = \phi$ أي لا يوجد أي نقطة من المنطلق صورتها $\vec{OP}$ عندئذ لا تكون P في المجموعة النقطية لـ $\vec{r}$.

2) $\vec{r}^{-1}(\vec{OP}) = \{t_0\}$ أي أن $\vec{OP} = \vec{r}(t_0)$ ولا يوجد قيمة لـ t غير t_0 تحقق المساواة ($\vec{OP} = \vec{r}(t_0)$)

عندئذ نقول إن P نقطة بسيطة في تمثيل $\vec{r}$ ونسمي t_0 قيمة وسيط $\vec{r}$ المقابلة لنقطة P.

3) $\vec{r}^{-1}(\vec{OP}) = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ حيث $m \geq 2$

عندئذ نقول إن P نقطة مضاعفة من المرتبة m بالنسبة لتمثيل $\vec{r}$.

- نلاحظ أنه يوجد m قيمة للوسيط مقابلة لنقطة P.

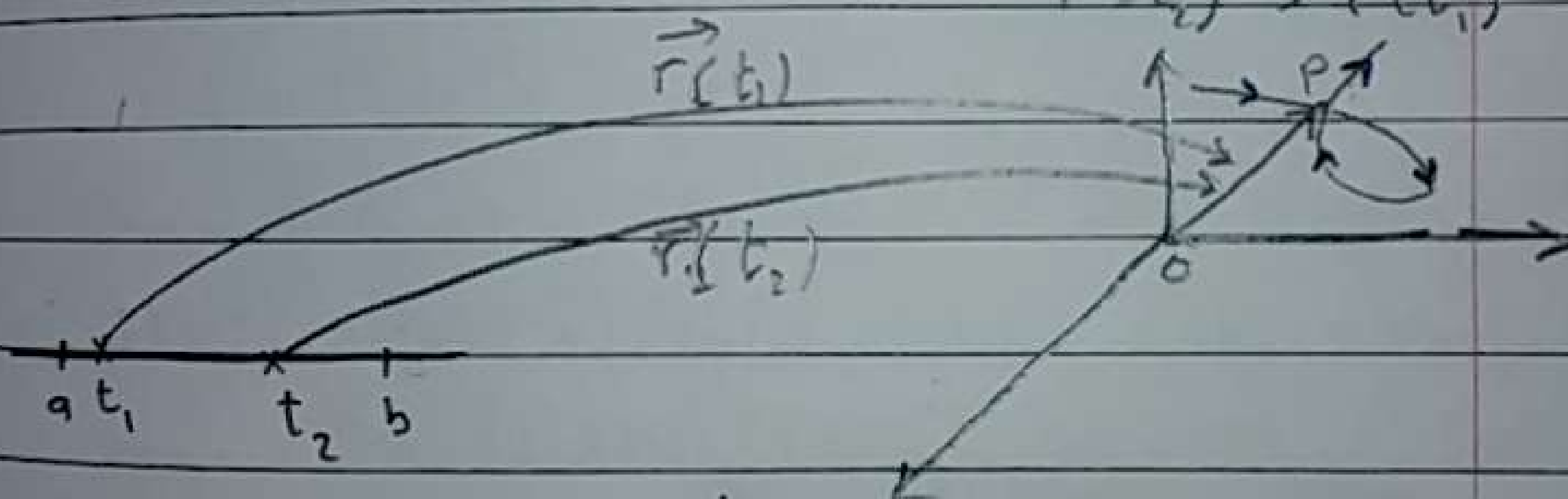
يمكن اعتبار النقطة البسيطة نقطة مضاعفة من المرتبة الأولى.

ملاحظة: إن التمثيل الوسيطي $\vec{r}$ يزود مجموعته النقطية بترتيب (بتسلسل) معرف كما يلي:

رأس $\vec{r}(t_1)$ يأتي قبل رأس $\vec{r}(t_2)$ إذا وفقط إذا كان $t_1<t_2$.

* لو كانت نقطة تقابلها وسيطين ونقطة أخرى يقابلها وسيط فكيف يمكن ترتيبها؟

ملاحظة: إذا كانت p نقطة مقابلة لقيمتين مختلفتين للوسيط t_1 و t_2 من المرتبة الأولى فإننا نعتبر أن رأسي المتجهين $\vec{r}(t_1)$ و $\vec{r}(t_2)$



نقطتين مختلفتين في المجموعة النقطية المرتبة (لاحظ أن المتجهين $\vec{r}(t_1)$ و $\vec{r}(t_2)$ هندسيًا منطبقتين على المتجه $\vec{OP}$ ورأسيهما هما النقطة p)

* للدلالة على أن نقطتين مختلفتين بعض المراجع ترمز لهم كما يلي $(t_1, \vec{r}(t_1))$ و $(t_2, \vec{r}(t_2))$.