البنى الجبرية 1

الدكتور: حمزة الحاكمي

المحاضرة :الرابعة

التاريخ : ٤/١٠/٢٠١٦

إعداد : أحمد أبو التوت

تم إعطاء مبرهنتان وملاحظة وبعض التعاريف مع تمهيدية زورن و موضوعة الاختيار الذين ليس لهما برهان رياضي و إنما لهما برهان فلسفي .

لنبدأ الان ☺

مبرهنة :

لتكن $(P, \leq)$ مجموعة جزئية مرتبة

إن الشروط الاتية متكافئة :

١) الشرط الأصغري : كل مجموعة جزئية وغير خالية في P تحوي عنصر أصغري .

٢) مبدأ الاستقراء : لتكن θ قضية ما

a_ إن جميع العناصر الأصغرية في P تحقق القضية θ .

b_ ولتكن $a \epsilon P$ إذا كانت جميع العناصر $x \epsilon P$ التي من أجلها $x < a$ المحققة القضية θ تؤدي الى ان العنصر a يحقق القضية θ .

عندئذ جميع عناصر المجموعة P تحقق القضية θ .

٣) شرط انقطاع السلاسل المتناقصة :

كل سلسلة متناقصة من عناصر المجموعة P على الشكل $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots$ تنقطع أي يوجد دليل n يحقق : $a_n = a_{n+1} = \cdots$

أو $\forall k \geq n \,;\, a_K = a_n$

البرهان :

$((1 \Rightarrow 2))$ لنفرض M هي مجموعة العناصر P التي لا تحقق القضية θ إذا كانت :

١) $M = \phi$ يتم المطلوب.

٢) $M \neq \phi$ عندئذ وحسب الفرض فإن يوجد في M عنصر أصغري وليكن a

بالتالي a لا يحقق القضية θ .

وايضا a ليس أصغريا في P لأنه لا يحقق القضية θ .

ومنه يوجد عنصر $x \epsilon P$ بحيث $x < a$ و $x \neq a$.

وبالتالي فإن $M \not\ni x$ و هذا يبين ان العنصر x يحقق القضية θ.

وحسب الفرض b فإن العنصر a يحقق القضية θ و هذا غير ممكن وبالتالي $M = \phi$.

أي ان جميع عناصر المجموعة p تحقق القضية θ.

(($3 \Leftarrow 2$))

لنعرف على المجموعة P قضية θ_0 معرفة بالشكل الاتي :

نقول عن العنصر $a \epsilon P$ أنه يحقق القضية θ_0 إذا كانت كل سلسلة متناقصة من عناصر المجموعة P تبدأ بالعنصر a تنقطع

ليكن $b \epsilon P$ عنصر اصغري ولتكن $b > b_1 > b_2 > b_3 \ldots \ldots .. > b_n$

سلسلة متناقصة من العناصر P ومنه

$$b = b_1 = b_2 = b_3 \ldots \ldots .. = b_n$$

لانهم مرتبطين .

وهذا يبين ان العناصر الأصغرية في P تحقق القضية θ_0.

وليكن $a \epsilon P$ ولنفرض أن جميع العناصر $x \epsilon P$ التي لأجلها (*) $x < a$ تحقق القضية θ_0 .

ولتكن $a > a_1 > a_2 > a_3 > \cdots$ (1)

سلسلة متناقصة من عناصر P تبدا بالعنصر a عندئذ $a_2 \epsilon P$ فإن $a > a_2$

وبالتالي فإن السلسلة .. $a_2 > a_3 > \cdots$

سلسلة متناقصة من عناصر P تبدا بالعنصر a_2 الذي يحقق θ_0 حسب * ومنه السلسلة السابقة تنقطع و هذا يبين ان 1 تنقطع اي ان a يحقق القضية θ_0 لآنه وبحسب الفرض فإن جميع العناصر P تحقق القضية θ_0.

وبالتالي المجموعة P تحقق شرط انقطاع السلاسل المتناقصة .

(($1 \Leftarrow 3$))

لنفرض جدلا انه توجد مجموعة جزئية وغير خالية ولتكن D في P لا تحوي عنصر أصغري وليكن $a_1 \epsilon D$ حيث a_1 ليس عنصر أصغري في D وبالتالي يوجد $a_2 \epsilon D$ حيث a_1 ليس عنصر أصغري حيث $a_2 < a_1$ ولما كان a_2 ليس عنصر أصغري في D

فإنه يوجد $a_3 \epsilon D$ بحيث $a_3 < a_2$ وبالتالي

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots ..$$

ولنفرض انه تم الحصول على العنصر $a_n \epsilon D$ حيث $n > 3$

والذي لأجله $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots .. a_n$

ولما كان a_n ليس اصغريا في D فإنه يوجد $a_{n+1} \in D$ بحيث $a_{n+1} < a_n$ نتابع بهذا الشكل نحصل على السلسلة المتناقصة من عناصر P من الشكل $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots . a_n > a_{n+1} > \cdots$

والتي لا تنقطع وهذا يناقض الفرض وبالتالي لا توجد $D \neq \phi$ لا تحوي عنصر اصغري .

مبرهنة :

كل مجموعة جزئية وغير خالية في N تحوي عنصر أصغر .

البرهان :

لتكن S مجموعة جزئية وغير خالية في N نميز الحالات التالية :

١) $S = N$ عندئذ S تحتوي عنصر أصغر او إذا كان $0 \in S$ عندئذ S تحوي عنصر أصغر .

٢) $0 \notin S$ و $S \neq N$

لنأخذ المجموعة: $L = \{a : a \in N ; a \leq x \ \ \forall x \in S \ \}$ $(*)$

$L \neq \Phi$ لان $0 \in L$ كما ان $L \neq N$

لأنه اذا فرضنا جدلا أنه $L = N$ عندئذ يوجد $a \in S$ عندئذ $a + 1 \in L = N$ و ان $a + 1 < a$ وهذا تناقض ومنه $L \neq N$

وبالتالي يوجد عنصر $b \in L$ بحيث $b + 1 \notin L$ لآنه اذا كان لأجل $b \in N$ اذا كان $b \in L$ فإن $b + 1 \in L$ نجد ان $L = N$وهذا غير ممكن .

ولما كان $b \in l$ فإن $\forall x \in s \ ; \ b \leq x$

ولنبرهن أن $b \in S$

لنفرض جدلاً ان $b \notin S$عندئذ

$$\forall x \in S \ ; \ b < x$$

اي ان $x - b \in N$

$$x - b > 0$$

نفرض أن $x - b = m$

عندئذ $x = m + b$

نضيف ونطرح مقدار (١) نجد : $x = (m-1) + (b+1)$

وبالتالي فإن $\forall x \in s \ ; \ b + 1 \leq x$

وحسب الفرض فإن $b+1 \in L$ وهذا يناقض كون $b+1 \notin L$

ومنه فإن $b \in S$ ويحقق

$$\forall\, x \in S \;;\; b \leq x$$

وهذا يبين ان العنصر x هو عنصر أصغر في s وهو المطلوب.

ملاحظة : كون N مجموعة مرتبة جزئياً وبما أن كل عنصر أصغر هو عنصر أصغري نجد أن كل مجموعة جزئية وغير خالية في N تحوي عنصر أصغري وهذا يبين أن مجموعة الاعداد الطبيعية تحقق الشرط الأصغري وبالتالي تحقق الشروط الثلاثة المتكافئ الثلاثة السابقة .

تعريف : لتكن $(P,\leq)$ مجموعة مرتبطة جزئيا وليكن $a,b \in P$ نقول إن a,b متقاربين اذا كان

$$b \leq a \quad \text{أو} \quad a \leq b$$

ونقول عن المجموعة المرتبة P انها مرتبة كليا اذا كان فيها كل عنصرين متقاربين.

مثال : مجموعة الأعداد الطبيعية مرتبة كليا :

$$0 < 1 < 2 < 3 < \ldots\ldots\ldots.$$

مرتبة كليا.

مثال : لتكن $A = \{a, b, c\}$

ولنأخذ $S = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

ليست مرتبة كلياً.

تعريف :

: لتكن $(P,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئية ولتكن B مجموعة جزئية غير خالية في P :

- نقول عن العنصر $u \in P$ أنه حد أعلى في المجموعة B إذا حققت الشرط :
$$\forall\, x \in B \;;\; x \leq u$$
- نقول عن العنصر $v \in P$ أنه حد ادنى في المجموعة B إذا حققت الشرط :
$$\forall\, x \in B \;;\; v \leq x$$

ملاحظة :

ما الفرق بين العنصر الأصغر والحد الادنى ؟

العنصر الأصغر : من الضرورة أن ينتمي إلى المجموعة B كي يتحقق وجوده .

الحد الأدنى :ليس من الضرورة أن ينتمي إلى المجموعة B كي يتحقق وجوده .

وكذلك الامر بالنسبة للحد الاكبر و الاعلى.

تمهيدية زورن :

لتكن $(P,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئيا إذا كانت كل مجموعة جزئية من P غير خالية ومرتبة كليا تملك حد اعلى (ادنى) عندئذ يوجد في P عنصر اعظمي (اصغري) واحدا على الأقل .

موضوعة الاختيار : لتكن A مجموعة ما وغير خالية عندئذ يوجد تطبيق :

$$L = P(A)\backslash\emptyset$$

عندئذ يوجد تطبيق :

$$f : L \to A$$

$$\forall B \in L \ ; f(B) \in B \subset A$$

"انتهت المحاضرة"