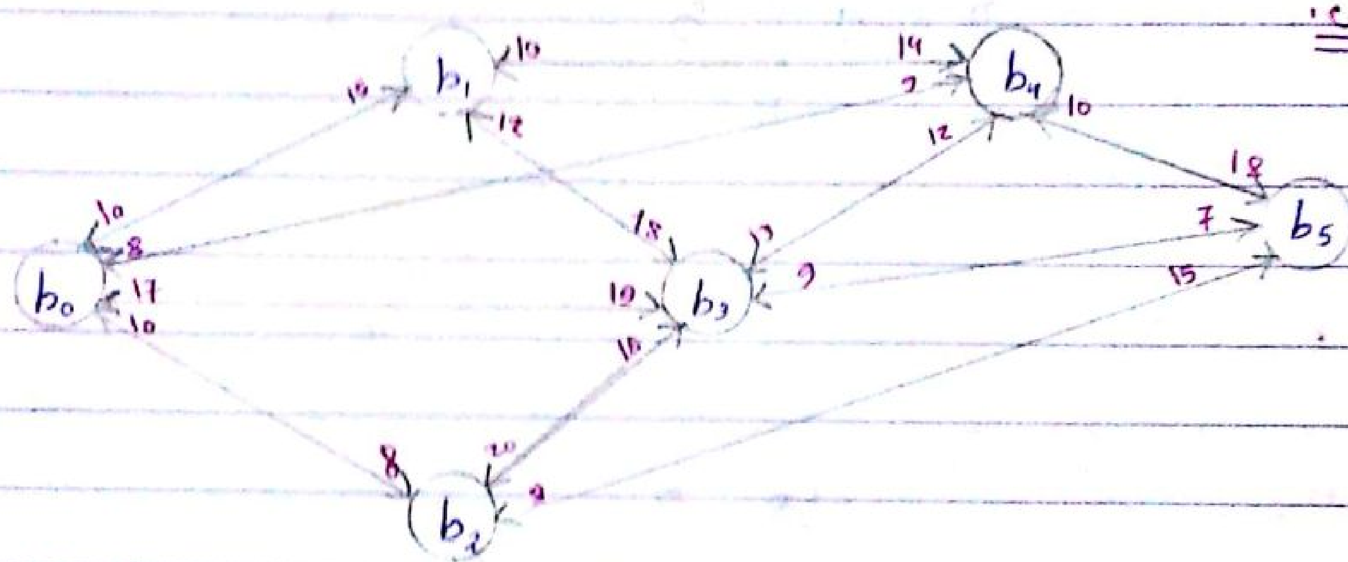
المحاضرة: الرابعة

التاريخ: 12 / 10 / 2016

في هذه المحاضرة سنقوم بحل مثال على مسألة النقل باستخدام خوارزمية التدفق الأعظمي ثم سننتقل لعنوان جديد وهو خوارزمية أقصر طريق short Route Algorithm وسنأخذ مثال لتوضيحها.

مثال:



أوجد التدفق الأعظمي لهذه الشبكة ؟

الحل:

		*	(0,15)	(0,8)	(0,19)	(0,9)	(2,8)
		b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
*	b_0	-	15	(-) 8	19	9	
(0,15)	b_1	10	-		18	14	
(0,8)	b_2	(+) 10		-	15		(-) 15
(0,19)	b_3	17	12	20	-	12	7
(0,9)	b_4	8	10	[illegible]	13	-	18
(2,8)	b_5			(+) 8	9	10	-

+ فمثلاً نرسم الجدول الموافق للشبكة، ثم نزود كل سطر وعامود بثنائية، ونؤشر السطر والعامود الموافقة لـ b_0 بـ * ، الثنائيات $(0, h_i)$ هي عبارة عن (0) رقم الدليل و h_i هي أول قيمة مضروبة في العامود مثلاً (0,15) ، (0,8) ونقوم بوضع الثنائية في السطر المقابل الثنائية (0,15) في عامود b_1 أيضاً نضعها في سطر b_1 وكذلك الأمر بالنسبة لباقي الثنائيات

+ وبالنسبة للعامود b_5 فإن أول قيمة مضروبة هي 15 وهي في سطر b_2 لذلك نضع في الثنائية رقم الدليل 2 (المركبة الأولى) وبالنسبة للمركبة الثانية فنلاحظ أن السطر الثاني مزود بثنائية وهي (0,8) لذلك نقارن 8 والقيمة المضروبة في عامود b_5 وهي 15 ونأخذ الـ min لهم فتكون الثنائية الموافقة لسطر عامود b_5 هي (2,8) ، ونستمر بالأسطر بالتالي لإخراج الثنائيات

+ ولمعرفة المسار نبدأ من الثنائية الأخيرة (2,8) ونلاحظ أن رقم الدليل في الثنائية هو 2 فننتقل للثنائية الموافقة لـ b_2 وهي (0,8) ورقم الدليل هو صفر وبالتالي فإن المسار من b_0 إلى b_5 هو:

$$b_0 \xrightarrow{8} b_2 \xrightarrow{15} b_5$$

$$Q_1 = \min\{8 , 15\} = 8$$

ثم نحدد الثنائيات: (b_0,b_2) ، (b_2,b_5) بإشارة (-)

والثنائيات المناظرة: (b_2,b_0) ، (b_5,b_2) بإشارة (+)

ثم نعود ونرسم الجدول من جديد وحيث نجد إشارة (-) نطرح $Q_1=8$ ، وحيث نجد إشارة (+) نجمع Q_1.

+ نكرر الخطوات السابقة عدة مرات بنفس الطريقة حتى يصبح لدينا العامود الأخير (عامود b_5) كله أصفار وعندها نتوقف

		*	(0,15)	(3,19)	(0,19)	(0,9)	(3,7)
		b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
*	b_0	/	15	0	(-) 19	9	
(0,15)	b_1	10	/		18	14	
(3,19)	b_2	18		/	15		7
(0,19)	b_3	(+) 17	12	20	/	12	(-) 7
(0,9)	b_4	8	10		13	/	18
(3,7)	b_5			16	(+) 9	10	/

المسار هو:

$$b_0 \xrightarrow{19} b_3 \xrightarrow{7} b_5$$

$$Q_2 = \min\{19 , 7\} = 7$$

نحدد الثنائيات:

(b_0,b_3) ، (b_3,b_5) بإشارة (-)

والثنائيات المناظرة:

(b_3,b_0) ، (b_5,b_3) بإشارة (+)

		*	(0,15)	(3,12)	(0,12)	(0,9)	(4,9)
		b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
*	b_0		15		12	(−) 9	
(0,15)	b_1	10			18	14	
(3,12)	b_2	18			15		7
(0,12)	b_3	24	12	20		12	0
(0,9)	b_4	(+) 8	10		13		(−) 18
(4,9)	b_5			16	26	(+) 10	

المسار هو:

$b_0 \xrightarrow{9} b_4 \xrightarrow{18} b_5$

$Q_5 = \min\{9, 18\} = 9$

نزود الثنائيات:

(b_4, b_5) ، (b_0, b_4) بإشارة $(-)$

والثنائيات المناظرة:

(b_5, b_4) ، (b_4, b_0) بإشارة $(+)$

		*	(0,15)	(3,12)	(0,12)	(1,14)	(4,9)
		b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
(*)	b_0		(−) 15		12	0	
(0,15)	b_1	+ 10			18	(−) 14	
(3,12)	b_2	18			15		7
(0,12)	b_3	24	12	20		12	0
(1,14)	b_4	17	+ 10		13		− 9
(4,9)	b_5			+ 16	16	+ 19	

نحدد السطر/عمود b_5 بـ (4,9) وليس (2,7) لأننا عندما درسنا الأسطر بالتالي السطر b_2 كل قيمة غير صفرية تقابل عامود b_5 ولكن b_2 غير مزود بثنائية لذلك نتركها وننتقل للسطر التالي حتى نزود جميع الأعمدة والأسطر بثنائيات.

المسار هو: $b_0 \xrightarrow{15} b_1 \xrightarrow{14} b_4 \xrightarrow{9} b_5$

$Q_4 = \min\{15, 14, 9\} = 9$

نزود الثنائيات التالية بـ $(-)$

(b_0, b_1) ، (b_1, b_4) ، (b_4, b_5)

ونظيراتها بـ $(+)$ وهي:

(b_1, b_0) ، (b_4, b_1) ، (b_5, b_4)

		b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
		*	(0,6)	(3,12)	(0,12)	(1,5)	(2,7)
*	b_0		6		(−) 12		
(0,6)	b_1	19			18	5	
(3,12)	b_2	18			+ 15		(−) 7
(0,12)	b_3	+ 24	12	(−) 20		12	
(1,5)	b_4	17	19		13		0
(2,7)	b_5			+ 16	16	28	

المسار هو:

$b_0 \xrightarrow{12} b_3 \xrightarrow{20} b_2 \xrightarrow{7} b_5$

$Q_5 = \min\{12, 20, 7\} = 7$

نعدل الثنائيات التالية بـ (−)

$(b_0, b_3), (b_3, b_2), (b_2, b_5)$

ونظيراتها بـ (+) وهي:

$(b_3, b_0), (b_2, b_3), (b_5, b_2)$

	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
b_0		6		5		
b_1	19			18	5	
b_2	18			22		0
b_3	31	12	13		12	
b_4	17	19		13		
b_5			23	16	28	

وأصبح العمود الأخير كله أصفاراً لذلك نتوقف عن تطبيق الخوارزمية ☺

ويكون التدفق الأعظمي هو:

$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5$

$\Rightarrow Q = 8 + 7 + 9 + 9 + 7$

$Q = 40$

ولإيجاد جدول التدفق نطرح الجدول الأخير من الجدول الابتدائي:

	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
b_0		9	8	14	9	
b_1	-9			0	9	
b_2	-8			-7		15
b_3	-14		7			7
b_4	-9	-9				18
b_5			-15	-5	-18	

نلاحظ في الجدول أن:

1) مجموع عناصر العامود الأخير هو التدفق الأعظمي

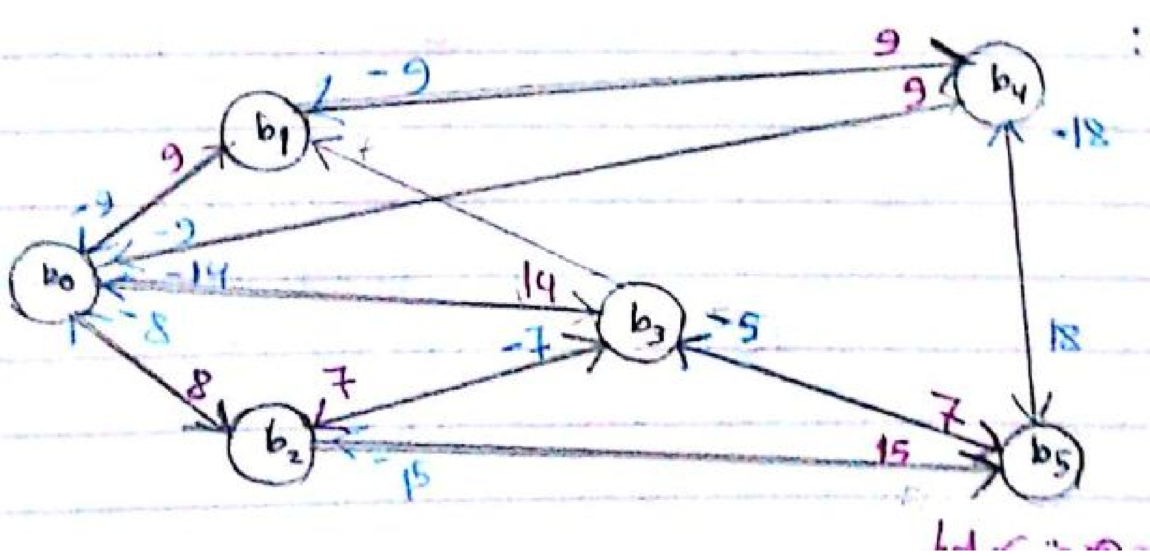
2) مجموع عناصر العامود الأول بالقيمة المطلقة يساوي مجموع عناصر العامود الأخير

3) المجموع وفق أي سطر ما عدا السطر الأول والأخير هو صفر

4) المجموع وفق أي عامود عدا العامود الأول والأخير هو صفر

وبالتالي يكون الحل صحيح ☺

ويكون مخطط التدفق هو:



* خوارزمية أقصر طريق : Short Route Algorithm

لتكن لدينا شبكة فيها S عقدة البداية (عقدة مصدر) و Q عقدة النهاية (عقدة الهدف) ولتكن القوس الواصل بين العقدتين u_i, v_j هو e_{ij} وقيمته هي d_{ij}

$$u_i \xrightarrow{d_{ij}} v_j$$

والمطلوب حساب أقصر طريق من S إلى Q فإننا نقوم بما يلي:

1) نفرض أن $u_1 = 0$

2) نحسب u_i حيث: $u_i = \min\{u_i + d_{ij}\}$

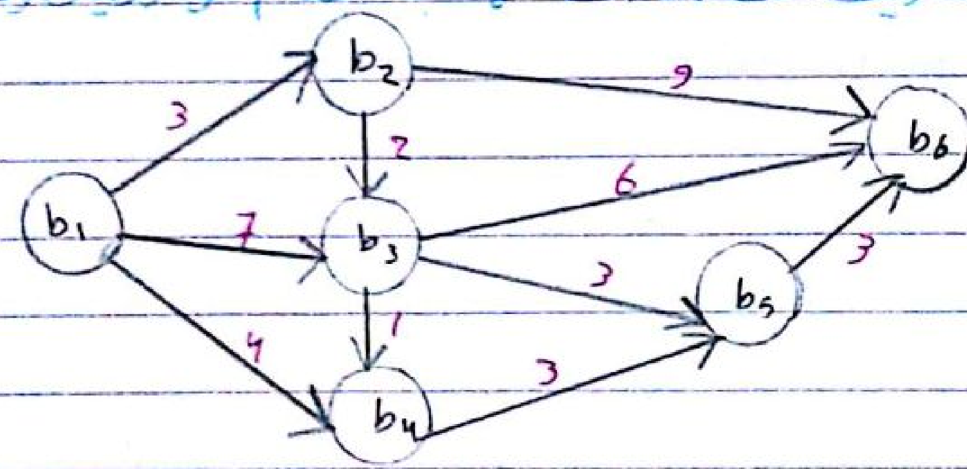
حيث: $i = 1 \dots n$ و $j = 2 : n$.

3) إذا كان $i = n$ (حيث n هو عدد عقد البيان) فإننا نتوقف عن حساب u_i.

ثم نتوقف عن التكرار ونعود لمطابقة لإيجاد الطريق

مثال:

أوجد أقصر طريق من b_1 إلى b_6 باستخدام خوارزمية أقصر طريق للبيان التالي:



الحل:

نفرض أن $u_1 = 0$.

$$u_2 = \min\{u_1 + d_{12}\} = 0 + 3 = 3$$

$$u_3 = \min\{(u_1 + d_{13}), (u_2 + d_{23})\} = \min\{(0+7), (3+2)\} = \min\{7, 5\} = 5$$

$$u_4 = \min\{(u_1 + d_{14}), (u_3 + d_{34})\} = \min\{(0+4), (5+1)\} =$$
$$= \min\{4, 6\} = 4$$

$$u_5 = \min\{(u_3 + d_{35}), (u_4 + d_{45})\} = \min\{(5+3), (4+3)\}$$

$$\Rightarrow u_5 = \min\{8, 7\} = 7$$

$$u_6 = \min\{(u_2+d_{26}),(u_3+d_{36}),(u_5+d_{56})\}$$

$$= \min\{(3+9),(5+6),(7+3)\} = \min\{12,11,10\}$$

$\Rightarrow u_6 = 10$ يمثل طول أقصر طريق

- لإيجاد أقصر طريق:

لاحظ أن $\boxed{u_6=10}$ حصلنا عليها من u_5+d_{56} وهنا نلاحظ أن $\boxed{u_5}$ هي 7 حصلنا عليها من u_4+d_{45} و $\boxed{u_4}$ هي 4 حصلنا عليها من u_1+d_{14} و $\boxed{u_1}$ هي صفر وبالتالي يكون أقصر طريق هو:

$$b_1 \xrightarrow{4} b_4 \xrightarrow{3} b_5 \xrightarrow{3} b_6$$

☺ انتهت المحاضرة الرابعة ☺

كتابة: نور ظاهر