التحليل العددي1

الدكتورة: رشا بعاج

المحاضرة : الثالثة

التاريخ : ١٦/١٠/٢٠١٦

إعداد : محمد فليون && عبد الرحمن البحش

مرحبا اصدقائي:

تابعت الدكتورة في المحاضرة الثالثة لمقررنا بمفاهيم أساسية بالتحليل العددي ، بعد ان حلت الوظيفة للمحاضرة السابقة :

١. . ليكن لدينا $f(x) = \cos(x)$ باستخدام ماك لوران بحيث

n=2 ,   x=0.01

احسب خطأ الاقتطاع المرتكب

الحل:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$E_{MAX} = \frac{|P_{n+1}|}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(\theta)\right|$$

$$p_{n+1} = x^3 = (0.01)^3$$

نشتق الدالة ثلاث مرات $f(x) = \cos(x)$

$$f'(x) = -\sin(x) \qquad f''(x) = -\cos(x) \qquad f^{(3)}(x) = \sin(x)$$

$|f^{(3)}(x) = 1|$ حيث اخذنا المشتق بأعلى قيمة وهي الواحد

$$(n+1)! = 3! = 6$$

$$E_{MAX} = \frac{(0.01)^3}{6} = \frac{1}{6000000}$$

٢. ليكن لدينا التابع $f(x) = \sin(x)$ من اجل (n=3) والمجال [0,π] عند النقطة $x = \frac{\pi}{2}$

المطلوب: بفرض أن الدالة هي f(x)=$\sin(0.5x)$

١) احسب خطأ الاقتطاع المرتكب عند الاحتفاظ بحدودية من المرتبة الثالثة (n=3).

٢) أوجد الخطأ الفعلي ثم الخطأ النسبي

$$E_{max} = \frac{|p_{n+1}|}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(\theta)\right|$$

(n+1)!=4!

$f^{(n+1)}$ هي المشتق من الدرجة (n+1) أي نقوم باشتقاق الدالة $\sin 0.5x$ (n+1)مرة ونحسبها عند القيمة الكبرى التي أعطيت في المجال [0,π]

$$f(x) = \sin(0.5x)$$

$$f'(x) = 0.5\cos(0.5x)$$

$$f''(x) = -(0.5)^2\sin(0.5x)$$

$$f'''(x) = -(0.5)^3\cos(0.5x)$$

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| = |f^4(x)| = (0.5)^4\sin(0.5x)$$

بما أننا نقوم بأخذ القيم العظمى فسوف نأخذ $f^{(n+1)}(x)$ بالقيمة العظمى فلذلك وضعنا قيمة مطلقة وكذلك أكبر قيمة ل sin هي1 و ذلك على المجال المعطى

$$f^4(x) = (0.5)^4$$

$$p_{n+1} = (0.5x)^4 = \left(0.5\times\frac{\pi}{2}\right)^4$$

$$p_{n+1} = 0.3805042619$$

ثم نعوض بالقانون:

$$E_{max} = \frac{0.3805042619}{4!}(0.5)^4 = 0.000990896$$

$$E_{exact} = |T-Q| \;\ldots\ldots\ldots *$$

حيث $T = \sin(0.5x)|_{\frac{\pi}{2}} \quad \Leftarrow \quad T = \sin\frac{\pi}{4}$

$$Q = 0.5 - \frac{(0.5x)^3}{3!}|_{\frac{\pi}{2}} = 0.41925$$

نعوض في (*) فنجد : $\Longrightarrow E_{exact} = 0.287856$

$$R_{exact} = \left|\frac{E_{exact}}{T}\right|$$

$$R_{exact} = 0.0034705$$

$$E_{exact} > E_{MAX}$$

$$0.287856 > 0.000990896$$

وهذا خلاف القاعدة إذ انقطاع السلسلة من اجل $n = 3$ يؤدي إلى خطأ كبييير.

نتابع بالمفاهيم الأساسية للتحليل العددي

٣. الأخطاء الناتجة عن الدوال واستقرارها.

خطأ التوابع واشكاليته بالحساب ظهر عندما استخدموا الحواسيب بالحساب، وذلك لأن الحواسيب تقوم بإجراء عمليات التقريب دون الرجوع الينا، لأن الحواسيب لديها حجم محدد بالذاكرة لتخزين القيم، وبالتالي هي عند حد معين ستقتطع جزء من الأرقام إما أن تقتطع وتدور أو تقتطع فقط وذلك حسب برمجتها.

فنتيجة لهذا ظهرت أخطاء للتوابع نتجت عن هذا التقريب في عملية الطرح

مثال: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

هذا التابع يعاني من عدم استقرار بجوار $\sqrt{2}$

نضرب البسط والمقام بمرافق المقام ..... $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$

$$= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$$

اشكالية هذه الدالة تكمن بأن الدالة تحوي عملية طرح في المقام فإذا كانت x قريبة من العدد 2 فهذا يؤدي إلى وجود الصفر بالمقام وبالتالي تكون الدالة غير مستقرة لنتخلص من هذه المشكلة قمنا بضرب للبسط والمقام بمرافق المقام بعد إجراء الإصلاحات توصلنا إلى أن القيمة الوحيدة التي تسبب عدم الاستقرار هي 2

(((تفسير : قد يتسائل البعض أنه في كلا الخطوتين يوجد طرح في المقام فلماذا اعتبرنا الحالة الأولى تعاني عدم استقرار في جوار الـ 2 ... أما الثانية فقط عند الـ 2 !!!

ذلك لأن القيم التي تجعل $\sqrt{x}$ قريباً جداً من $\sqrt{2}$ هي أكثر من القيم التي تجعل x قريبة جداً من 2)))

مثال اخر: $ax^2+bx+c=0$

حل المعادلة $\Delta = b^2-4ac$

الحل: لحل معادلة من الدرجة الثانية نقوم أولاً بإيجاد Δ

نحدد نوع Δ إما $\Delta<0$ أو $\Delta=0$ أو $\Delta>0$

إذا كان $\Delta>0$ يوجد حلان لـ x إما $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ أو $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

علماً أننا لا نستطيع أن نعرف هنا أين توجد عملية الطرح في x_1 أم في x_2 لأنه يمكن لـ b أن تأخذ إشارة سالب أو إشارة موجب فإذا كانت b ذات إشارة موجبة فتكون عملية الطرح في x_1 أما إذا كانت b ذات اشارة سالبة فستكون عملية الطرح موجودة في x_2 فلذلك سنعتبر أن b ذات إشارة موجبة أي نحن سنأخذ الحالة الموافقة لعملية الطرح

كما ذكر في السؤال أن $\Delta \cong b^2$ فيجب حل مشكلة عملية الطرح

لا يوجد مشكلة بالتابع $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

يوجد مشكلة $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

لحل مشكلة عملية الطرح هنا نلجأ إلى الرياضيات $\Leftarrow$

سنضرب البسط والمقام بمرافق البسط $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{-b-\sqrt{\Delta}}=\frac{b^2-\Delta}{2a[-b-\sqrt{\Delta}]}$

$$=\frac{b^2-[b^2-4ac]}{2a(-b-\sqrt{\Delta})}=\frac{b^2-b^2+4ac}{2a(-b-\sqrt{\Delta})}=\frac{4ac}{2a(-b-\sqrt{\Delta})}=\frac{2c}{-b-\sqrt{\Delta}}$$

وهكذا تخلصنا من امكانية عدم الاستقرار .

كيف يمكن أن نعرف أن الدالة مريضة:

ندرس $R_{(f)}$ إذا كانت قيمة صغيرة فنقول إن التابع حالته جيدة أما إذا كانت قيمته كبيرة فنقول إن التابع مريض وكيف يمكن أن نحدد قيمته؟ عن طريق العدد الشرطي الذي سنتعرف عليه الان:

$$R_{(f)} = \left|\frac{E_{(f)}}{f}\right|$$

حيث أن: E_{exact} هو الخطأ المطلق $\Leftarrow E_{(f)} = |f(x_2) - f(x_1)|$

أو $\Leftarrow \quad E_{(f)} = |y_2 - y_1|$

أي $\Leftarrow \quad E_{(f)} = \Delta f$

حيث: $f' = \frac{\Delta f}{\Delta x} \Rightarrow \Delta f = f'.\Delta x$

$$\Rightarrow R_{(f)} = \frac{f'}{f}\Delta x$$

نضرب ونقسم على x

$$\Rightarrow R_{exact}(f) = \frac{f'}{f}\Delta x\frac{x}{x} = \frac{f'}{f}\boldsymbol{x}\frac{\Delta x}{\boldsymbol{x}}$$

حيث $\frac{\Delta x}{x}$ تغير نسبي لـx أي هي $R_{(f)}$ ومنه

$$R_{(f)} = \left|\frac{f'}{f}x\right|\left|R_{(x)}\right|$$

وكوننا ندرس تحليل عددي فالتغيرات تكون صغيرة فلذلك $R_{(x)}$ هو صغير جداً جداً وبذلك يكون المعيار الذي يحدد لنا إن كانت $R_{(f)}$ كبيرة أم صغيرة هو $\left|\frac{f'}{f}x\right|$ وهو **العدد الشرطي** وبالتالي إن العدد الشرطي هو الذي سيخبرنا بأن التابع مريض أم لا.

ملاحظات حول العدد الشرطي:

١) إذا كان العدد الشرطي كبير عندئذٍ تكون الدالة f مريضة ويجب معالجتها بأحد الأساليب الرياضية المعروفة (على سبيل المثال استخدام المرافق-إخراج عامل مشترك)
٢) إذا كان العدد الشرطي صغير عندئذٍ تكون الدالة جيدة
٣) في حالة الحدوديات من الدرجة الثانية غالباً نطلب معالجة الدالة مباشرةً دون التحقق من أنها مريضة
٤) إذا كان العدد الشرطي يقع بين 0 وَ 1 عندئذٍ نقول أن الدالة جيدة وخلاف ذلك هي مريضة
٥) تكون الدالة مريضة من أجل قيمة معينة والعدد الشرطي يمثل قيمة محددة للمتغير

مثال: أوجد العدد الشرطي للدالة $F = \sqrt{x}$

$$\text{العدد الشرطي} = \left|\frac{f'}{f}x\right| = \left|\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}x\right| = \left|\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x}}x\right| = \frac{1}{2}$$

حيث أن $0 < \frac{1}{2} < 1$ إذاً f جيدة دوماً وليست مريضة

سؤال دورة :

أوجد العدد الشرطي للدالة $f(x) = e^x$

من أجل هذه القيمة .

$$f'(x) = e^x$$

$$\text{العدد الشرطي} = \left|\frac{f'}{f}x\right| = \left|\frac{e^x}{e^x}x\right| = x$$

من اجل x=10 إذاً" العدد الشرطي =10

f(x) مريضة لان n=10>1

"انتهت المحاضرة "