ψ دالة

$\psi(x)$ ليست دالة

1

التاريخ / / الموضوع

المحاضرة الثانية:

تعريف المعادلة التكاملية:

هي المعادلة من الشكل:

تابع لـ x

$$\psi(x) = h(x) + \lambda \int_a^b \underbrace{k(x,t)}_{\text{دوال على المجال } [a,b]} . \psi(t) . dt \quad *$$

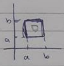
$[a,b]$ فترة مغلقة محدودة من المستوي الحقيقي.

ψ دالة.

λ عدد ما / وسيط / ممكن أن يكون حقيقي أو عقدي.

$h(x)$ دالة معلومة.

$k(x,t)$ نواة المعادلة * معرّفة ومستمرة على الساحة $D: [a,b] \times [a,b]$



ملاحظة 1

من الممكن كتابة هذه المعادلة، نفرض L مؤثر تكاملي

$$L[\psi(x)] = h(x)$$

$$L(\alpha \psi_1(x) + \beta \psi_2(x)] = \alpha L[\psi_1(x)] + \beta[\psi_2(x)]$$

أثبت ذلك، يتم عن طريق التعريف وذلك بالتعويض البديل.

- نقول عن معادلة تكاملية أنها خطية إذا كانت العمليات على الدالة المجهولة خطية.

- مثال عن معادلة غير خطية:

$$\psi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} k(s,t) \psi^2(t) . dt$$

سوف نقتصر دراستنا على المعادلات الخطية.

FARAH

التاريخ / /   الموضوع

ملاحظة 2 :

المتغيرات في الدوال هي متغيرات حقيقية ، من الممكن أن تكون الدوال h ، Ψ ، K دوال عددية ، ولكن المتحول فيها هي متحولات حقيقية .

تعريف الدالة المكاملة التربيعية [illegible] :

نقول عن الدالة $\Psi = \Psi(t)$ أنها كمولة تربيعياً " إذا تحقق الشرط التالي :

$$* \quad \int_a^b |\Psi(t)|^2 . dt < +\infty$$

= دالة لمتغيرين : $\Psi = \Psi(s,t)$

نقول عن $\Psi = \Psi(s,t)$ أنها كمولة تربيعياً " في $D(a \le x \le b , a \le t \le b)$ إذا تحققت الشروط التالية :

$$* \quad \int_a^b \int_a^b |\Psi(s,t)|^2 . ds . dt < +\infty$$

$$* \quad \int_a^b |\Psi(s,t)| . dt < +\infty \; ; \; \forall x \in [a,b]$$

$$* \quad \int_a^b |\Psi(s,t)| . ds < +\infty \; : \; \forall t \in [a,b]$$

الأنواع الرئيسية للمعادلات التكاملية الخطية :

[illegible]

أ. $$\Psi(x) = h(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) . \Psi(t) . dt$$

تدعى هذه المعادلة بـ "معادلة فريدهولم " الخطية من النوع الثاني " .

* عندما $h(x) = 0$ $\Leftarrow$ عندئذٍ تسمى المعادلة السابقة بمعادلة فريدهولم المتجانسة .

التاريخ / /

الموضوع

ملاحظة إضافية

$y = s + 1$

$y = t + 1$

$y = x + 1$

نفس معناها ولهم نفس الحكم البياني

ب. $f(x) = \int_a^b k(x,t) . \psi(t) . dt$

تسمى هذه المعادلة معادلة "فريدهولم من النوع الأول" تكون الـ ψ مجهولة داخلة

ج. $\psi(x) = h(x) + \lambda \int_a^{x} k(x,t) . \psi(t) . dt$

معادلة "فولتيرا من النوع الثاني".

. $h(x) = 0 \Leftarrow$ تكون المعادلة متجانسة.

في جميع الحالات يجب الانتباه إلى أن النواة $k(x,t)$ تتمتع بالصفة التناظرية أي:

$k(s,t) = k(t,s)$; s, t متحولات مستقلة

حل معادلة فريدهولم التكاملية الخطية من النوع الثاني بطريقة التقريبات المتتالية:

سنفرض أن الدوال k، h دوال معلومة قابلة تربيعياً وبالمتغير k بمتغيرين

$\psi(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) \psi(t) . dt$ ★

علامة التكامل المحدود تجاه الـ المتغير

بالتعويض في المعادلة ★ بـ $\psi(t) = 0$ نحصل على التقريب الأول

$\psi_0(x) = h(x)$

نبدل التقريب الأول في المعادلة ★ نحصل على التقريب الثاني.

$\psi_1(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) . \psi_0(t) . dt$

وعليه وبالتبديل والتعويض يكون التقريب الثالث هو:

$\psi_2(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) . \left[h(t) + \lambda \int_a^b k(t,s) . h(s) . ds \right] . dt$

هنا ذاته $\psi_1(x)$ ولكنه مكتوب بدلالة t حيث يمكننا كل x بـ t لذلك حتى لا يصبح الناتج معقداً نحول هنا $\psi_1(x)$ بدلاً من أو مضاد.

$\Rightarrow \quad \psi_2(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) . \psi_1(t) . dt$

⋮

وبالاستمرار نحدث التقريب من المرتبة $n+1$ يعطى بالشكل :

$$\psi_{n+1}(x) = h(x) + \lambda\int_a^b k(x,t).\psi_n(t).dt$$

وهكذا نحصل على متتالية من الحلول $[\psi_{n+1}(x)]$ فإذا كانت هذه المتتالية متقاربة بانتظام "سنفرضها متقاربة انتظاماً" على الساحة $[a,b]$ عندئذ :

$$\psi_{n+1}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \psi(x)$$

وبعبارة أخرى :

$$\lim_{n\to\infty}\psi_{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty}\psi_n(x) = \psi(x)$$

:

$$\lim \psi_{n+1} = \boxed{\psi(x) = h(x) + \lambda\int_a^b k(x,t).\psi(t)\,dt}$$

هذه النهاية حل للمعادلة [illegible] التكاملية

من أجل حساب نهاية المسار $\lim \psi(t)$ سنقوم بإجراء الحسابات التالية :

لدينا : $\psi_0(x) = h(x)$

$$\psi_1(x) = h(x) + \lambda\int_a^b k(x,t).h(t).dt$$

$$\psi_2(x) = h(x) + \lambda\int_a^b k(x,t)\left[h(t) + \lambda\int_a^b k(t,\zeta).h(\zeta).d\zeta\right]dt$$

$$\Rightarrow \psi_2(x) = h(x) + \lambda\int_a^b k(x,t)\,h(t).dt + \underbrace{\lambda^2\int_a^b k(x,t)\left[\int_a^b k(t,\zeta).h(\zeta)\,d\zeta\right]dt}_{=:\ I}$$

لتبسيط التكامل I نقوم بإدخال الرموز التالية :

$$K_1(x,t) = K_{\boxed{1}}(x,t)$$

$$K_2(x,t) = \int_a^b k_{\boxed{1}}(x,\zeta).K_1(\zeta,t).d\zeta$$

$$K_3(x,t) = \int_a^b k_{\boxed{1}}(x,\zeta).K_2(\zeta,t)$$

ضمن الدليل الأول موضوع ②

$\vdots$ ② ذكر الدليل

$$K_n(x,t) = \int_a^b k_{\boxed{1}}(x,\zeta).K_n(\zeta,t).d\zeta$$

$$K_m(x,t) = \int_a^b k_{\boxed{1}}(x,\zeta).K_{m-1}(\zeta,t).d\zeta$$

الموضوع التاريخ / /

وبالتالي نستطيع كتابة :

$$\psi_2(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\, h(t)\,.dt + \lambda^2 \int_a^b k_2(x,t)\,.h(t)\,.dt$$

$$\Rightarrow \psi_3(x) = h(x) . \lambda \int_a^b k(x,t)\,.h(t)\,.dt + \lambda^2 \int_a^b k_2(x,t)\,.h(t)\,.dt + \lambda^3 \int_a^b k_3(x,t)\,.h(t)\,.dt.$$

وبالمتابعة على نفس المنوال نحصل على الصيغة التالية :

$$\psi_n(x) = h(x) + \sum_{m=1}^{n} \lambda^m \int_a^b k_m(x,t)\,.h(t)\,.dt$$

نفرض وجود تقارب منتظم ونوجد النهاية

نستعرض أن شروط التقارب المنتظم هنا محققة نحو فرضينا سعد وبالتالي نستطيع الانتقال إلى النهاية أي أن :

$$\boxed{\lim \psi_n(x) = \psi(x) = h(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^b k_m(x,t)\,.h(t)\,.dt}$$

ندعو هذه المتسلسلة بمتسلسلة نيومن .