Syria Math

التحليل 3

الدكتور : يحيى قطيش

المحاضرة : الرابعة

التاريخ : ٢٠١٦/١٠/١٩

Web: www.syriamath.net group: Improve our mathematics

متتاليات التوابع(الدوال):

تعريف: لتكن I مجموعة جزئية غير خالية من مجموعة الأعداد الحقيقة $\mathbb{R}$

ولتكن H مجموعة التوابع الحقيقة المعرفة على I عندها بمقابلة كل عدد طبيعي مغاير للصفر n بتابع حقيقي من H وليكن $f_n(x)$ فإنه يتم الحصول على متتالية التوابع الحقيقية(أو متتالية الدوال الحقيقية) المعرفة على I الآتية:

$$f_1(x)\ ,f_2(x),\dots,f_n(x),\dots$$

والتي حدها الأول هو تابع $f_1(x)$ وحدها الثاني هو $f_2(x)$ وحدها العام (أو الحد النوني) هو التابع $f_n(x)$

تعريف: نقول عن متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ إنها متقاربة $\forall x\in I$ و $n\in\mathbb{N}$

إذا وفقط إذا كانت متقاربة كمتتالية عددية من أجل جميع قيم x من المجال I ونكتب:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$$

حيث يقال عن التابع $f(x)$ إنه تابع النهاية للمتتالية $\{f_n(x)\}$ المدروسة أو أنه التابع الحدي للمتتالية المدروسة أو أنه نهاية المتتالية ويقال حينئذٍ أن متتالية التوابع المدروسة متقاربة (نقطياً) على I من هذا التابع $f(x)$

ملاحظة: قد يحدث أن تتقارب متتالية التوابع من أجل بعض النقاط من مجموعة تعريفها وتتباعد من أجل البعض الآخر

تعريف: نقول عن المتتالية $\{f_n(x)\}$ إنها متباعدة إذا وجدت نقطة x_0 من I تكون عندها المتتالية $\{f_n(x)\}$ متباعدة كمتتالية عددية

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)=\infty$$

تعريف (تذكرة): نقول عن المتتالية العددية $\{a_n\}$ إنها متقاربة من العدد الحقيقي a إذا وجد لكل $\varepsilon>0$ عدد $N_0(\varepsilon)$ بحيث يكون: $|a_n-a|<\varepsilon$ من أجل:
$n\geq N_0(\varepsilon)$

تعريف: لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع حقيقية معرفة على $I\subseteq\mathbb{R}$ تكون $\{f_n(x)\}$ متقاربة **نقطياً** إذا وفقط

إذا وجد لكل $\varepsilon>0$ ولكل $x_0\in\mathbb{R}$ عدد طبيعي $N_0=N_0(\varepsilon,x_0)$

بحيث يكون:

$$\forall\, n \geq N_0\ ;\ |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

ونكتب:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

ملاحظة: إن العدد N_0 في الحالة العامة يتغير بتغير εوبتغير x_0 أي أنه يتعلق بالعدد ε المأخوذ وبقيمة x المأخوذة من I ولذلك يمكن كتابته كالآتي:

$$N_0 = N_0(x_0, \varepsilon)$$

مثال: لتكن لدينا متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ حيث $x \in I = [0,1]$, $f_n(x) = x^n$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0\ ;\ 0 \leq x < 1 \\ 1\ ;\ \quad\quad x = 1 \end{cases}$$

نجد أن المتتالية متقاربة نقطياً على $[0,1]$ ونجد أن جميع حدود هذه المتتالية

$$x, x^2, x^3 \ldots, x^n, \ldots$$

هي توابع مستمرة على $I = [0,1]$ أما تابع النهاية هو منقطع أي (غير مستمر عند $x = 1$)

تذكرة: شرط الاستمرار : $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

مثال: لتكن متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ حيث $f_n(x) = \frac{1}{e^{nx}}$ و $x \in I = [0, \infty[$ أوجد دالة النهاية و هل جميع حدود المتتالية مستمرة؟

الحل:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{nx}} = \begin{cases} 0\ ;\ x > 0 \\ 1\ ;\ \quad x = 0 \end{cases}$$

فهي متقاربة نقطياً ، و كما أنه نلاحظ أن جميع حدود هذه المتتالية $\frac{1}{e^x}, \frac{1}{e^{2x}}, \ldots$ توابع مستمرة إلا أن تابع النهاية $f(x) = \begin{cases} 0\ ;\ x > 0 \\ 1\ ;\ \quad x = 0 \end{cases}$ غير مستمر عند الصفر

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \neq f(0) = 1$$

مثال: لتكن متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ حيث $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ و $x \in I = [0,\infty[$ أوجد دالة النهاية وهل جميع حدود المتتالية مستمرة؟

الحل:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx} = \begin{cases} 0 \;;\; x > 0 \\ 1 \;;\; \quad x = 0 \end{cases}$$

و من الواضح أن حدود هذه المتتالية توابع مستمرة على المجال المعطى إلا أن تابع النهاية غير مستمر عند الصفر

التقارب المنتظم لمتتالية التوابع الحقيقية:

تعريف: لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية التوابع الحقيقية المعرفة على I ونقول أن هذه المتتالية متقاربة بانتظام من التابع $f(x)$ على I إذا وفقط إذا وجد لكل $\varepsilon > 0$ عدد طبيعي N بحيث يكون:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

لأجل كل $n \geq N$

نتيجة: كل متتالية توابع متقاربة بانتظام على I تكون متقاربة نقطياً على I لكن ليس كل متتالية توابع متقاربة

نقطياً تكون بالضرورة متقاربة بانتظام.

ملاحظة: إن كل متتالية متقاربة نقطياً يكون تقاربها إما منتظماً أو غير منتظم ففي حالة التقارب المنتظم يتعلق العدد N_0 بـ ε فقط ولا يتعلق بالنقط x من I أي أنه إذا تم تثبيت $\varepsilon > 0$ فإن N_0 يكون صالح لتحقيق المتراجحة $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

من اجل كل x من المجالI حيث $n \geq N_0$ أما في حالة التقارب غير المنتظم فلا يتحقق ما تم ذكره، لأن العدد N_0 يتعلق بـ ε وبالنقطة x

مثال: $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع حيث $f_n(x) = \frac{1}{nx}$ و

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nx} = 0 = f(x) \quad \forall\, x \in [1,\infty[$$

المتتالية متقاربة نقطياً من التابع الصفري $f(x) = 0$ لنثبت أنها متقاربة بانتظام:(أي أن N يتعلق فقط بـ ε)

لكل $0 < \varepsilon$ يوجد $N > \frac{1}{\varepsilon}$ بحيث يكون:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{nx} - 0\right| = \left|\frac{1}{nx}\right|$$

$$= \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon \quad ; \quad \forall\, x \in [1, \infty[\ , \qquad n \geq N$$

ومنه المتتالية متقاربة بانتظام على I

ملاحظة: إذا كانت متتالية التوابع متقاربة بانتظام على المجال I فهي متقاربة بانتظام على أي مجال جزئي من I

مثال: بفرض $0 < p < q < 1$ ومتتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ حيث:

$$f_n(x) = x^n \qquad x \in I = [p, q]$$

$$\forall\, x \in [p, q] \Rightarrow f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0$$

إن $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ بسبب ما يلي:

نلاحظ أن x محصورة ما بين الصفر والواحد أي إذا كانت x أقل من واحد أو بين 1و-1 فعندها x^n تسعى للصفر لما n تسعى للانهاية (لأنها متتالية هندسية أساسها أصغر تماماً من الواحد بالقيمة المطلقة)

ومنه المتتالية متقاربة نقطياً على هذا المجال وعلى أي جزء من هذا المجال هي متقاربة نقطياً أيضاً.

لنثبت أن المتتالية متقاربة بانتظام: نلجأ للتعريف:

من أجل كل $0 < \varepsilon$ يوجد $N > \max\left(1, \frac{ln\ \varepsilon}{ln\ q}\right)$ بحيث يكون:

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = x^n < \varepsilon$$

و بقي لكي أن تتقارب البحث عن n المحققة للمتباينة: $x^n < \varepsilon$:

$$x^n < \varepsilon \Rightarrow \ln x^n < \ln \varepsilon$$

$$n \ln x < \ln \varepsilon \Rightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x}$$

ولكن بما أن $\ln x$ مقدار سالب(لأنه محصور بين الصفر والواحد) نقلب إشارة المتراجحة فيصبح:

$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} \geq \frac{\ln \varepsilon}{\ln \mathrm{q}} \quad ; \quad x \in [p,q]$$

يجب أن لا يوجد علاقة بين x و n ونريد تصغير الكسر لذلك نكبر المقام ويكون ذلك بأخذ $x = q$

يوجد كل $\varepsilon > 0$ عدد N يحقق أنه عندما $n > N = \max\left(1, \frac{ln\, \varepsilon}{ln\, q}\right)$ فإن

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = x^n < \varepsilon$$

المتتالية متقاربة بانتظام.

مثال محلول من الكتاب ☺ لتكن متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ حيث $f_n(x)$ معرفة على $]-\infty, +\infty[$ وفق الآتي:

$$(n \geq 1), f_n(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad |x| > \frac{1}{n} \\ \frac{n}{3} & ; \quad |x| \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

إن هذه المتتالية متباعدة على $\mathbb{R}$ لأنها متباعدة من أجل $x = 0$ (مثلاً) وذلك بملاحظة التالي:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad |x| > \frac{1}{n} \\ +\infty & ; \quad |x| \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

أي أن المتتالية العددية $\{f_n(0)\}$ تكون متباعدة لأن $f_n(0) \to +\infty$ ومن ثم فإن متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ تكون متباعدة على $\mathbb{R}$

خواص متتالية التوابع المتقاربة:

مبرهنة(١): (هامة)

لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع معرفة على مجال I وبفرض أنها متقاربة بانتظام من التابع $f(x)$ علىI عندئذٍ

١) إذا كانت حدود هذه المتتالية توابع مستمرة على I فإن التابع $f(x)$ يكون أيضاً مستمر على I

٢) إذا كانت حدود هذه المتتالية توابع محدودة على I فإن التابع $f(x)$ يكون أيضاً محدود على I

الإثبات:

١) ليكن $x_0 \in I$ وليكن $\varepsilon > 0$ بما أن المتتالية $\{f_n(x)\}$ متقاربة بانتظام فإنه يوجد عدد طبيعي $N_0 \neq 0$ بحيث يكون $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ عندما $n \geq N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I

$f_n(x)$ حدودها توابع مستمرة ومنه من أجل $x_0 \in I$ يوجد $\delta > 0$ بحيث يكون $n \geq N_0$ ويحقق:

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}: \ |x - x_0| < \delta \ , \qquad n \geq N_0$$

$$\lim_{x \to x_0} f_n(x) = f_n(x_0) \qquad : \quad x_0 \in I$$

أي من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث يكون $|x - x_0| < \delta$

فإن:

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)|$$

$$\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

أي أن الدالة $f(x)$ مستمرة في x_0 وبالتالي $x_0 \in I$ أي $f(x)$ مستمرة على I

٢) ليكن $\varepsilon > 0$ بسبب التقارب المنتظم يوجد $N_0 \neq 0$ بحيث يكون:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad : \quad n \geq N_0 \qquad \forall\, x \in I$$

لكن $n \geq N_0$ فإن حدود المتتالية $f_n(x)$ محدودة فإنه يوجد عدد موجب $k \neq 0$

بحيث يكون $|f_n(x)| < k$ من أجل جميع قيم x من I عندئذٍ يكون:

$$|f(x)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)|$$

$$< \varepsilon + k = M$$

$$\forall\, x \in I \Rightarrow |f(x)| < M$$

وبالتالي دالة النهاية $f(x)$ محدودة.

"انتهت المحاضرة"

نذير تيناوي