محاضرة 7

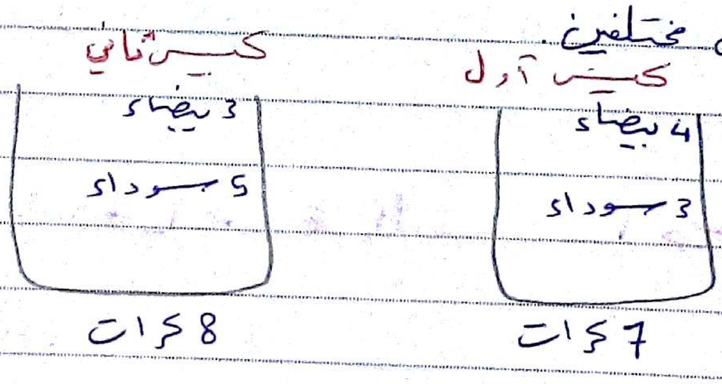
/ /

تمرين: يحوي كيس $\boxed{4}$ كرات بيضاء و $\boxed{3}$ سوداء، ويحوي كيس آخر $\boxed{3}$ كرات بيضاء و $\boxed{5}$ كرات سوداء، سحبت كرتان من الكيس الأول ووضعتا في الكيس الثاني، سحبت بعد ذلك كرة من الكيس الثاني المطلوب:

أ) ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الكيس الثاني سوداء

ب) استنتج من الطلب السابق احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء.

ج) إذا علمت أن الكرة المسحوبة من الكيس الثاني سوداء، فما احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان من الكيس الأول من لونين مختلفين.



الحل: نفرض أن

H_1: الكرتان المسحوبتان من الكيس الأول بيضاء.

H_2: = = = = = سوداء

H_3: = = = = من لونين مختلفين

$$P(H_1) = \frac{C^4_2}{C^7_2} = \frac{2}{7}$$

$$P(H_2) = \frac{C^3_2}{C^7_2} = \frac{1}{7}$$

$$P(H_3) = \frac{C_1^4 \times C_1^3}{C_2^7} = \frac{4}{7}$$

نلاحظ أن:

$$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} + \frac{4}{7} = \boxed{1}$$

أي أن H_1 ، H_2 ، H_3 تشكل تجزئة لـ Ω التي تمثل نتائج سحب كرتين من الكيس الأول.

أ) نرمز A الحدث الدال على أن الكرة المسحوبة من الكيس الثاني سوداء فيكون باستخدام قاعدة الاحتمال المركب:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A)$$

حيث أن:

$$P_{H_1}(A) = \frac{C_1^5}{C_1^{10}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$P_{H_2}(A) = \frac{C_1^7}{C_1^{10}} = \frac{7}{10}$$

$$P_{H_3}(A) = \frac{C_1^6}{C_1^{10}} = \frac{6}{10}$$

فينتج أن:

$$P(A) = \frac{2}{7} \times \frac{5}{10} + \frac{1}{7} \times \frac{7}{10} + \frac{4}{7} \times \frac{6}{10}$$

$$= \frac{10 + 7 + 24}{70} = \frac{41}{70}$$

ب) B الكرة المسحوبة بيضاء فإن:

$$P(B) = 1 - P(A) = \frac{29}{70}$$

د) حسب دستور بايز فإن:

$$P_A(H_3) = \frac{P(H_3) \cdot P_{H_3}(A)}{\sum_{i=1}^{3} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}$$

$$= \frac{\frac{4}{7} \cdot \frac{6}{10}}{\frac{41}{70}} = \frac{24}{41}$$

تمرين: يخطط شخص لقضاء عطلة في إحدى المناطق السياحية a، b، c ويأخذ بالاختيار كما يلي:

يقذف حجر النرد فإذا حصل على عدد زوجي يزور المنطقة $\boxed{a}$ وإذا حصل على عدد فردي يقذف قطعة نقود، ويزور المنطقة $\boxed{b}$ إذا حصل على الصورة (H)، ويزور المنطقة $\boxed{a}$ إذا حصل على الكتابة (T)

فإذا علمت أن احتمال هطول المطر في كل المناطق هو على الترتيب: $\boxed{0,2}$ ، $\boxed{0,4}$ ، $\boxed{0,3}$ وعندما عاد هذا الشخص وجد الوحل على عجلات سيارته، فما احتمال أنه زار المنطقة $\boxed{a}$

<u>الحل:</u> نفرض أن:

H_1 : زار الشخص المنطقة $\boxed{a}$

H_2 : = = = $\boxed{b}$

H_3 : = = = $\boxed{c}$

نلاحظ أن الأحداث H_1، H_2، H_3 تشكل تجزئة لـ Ω المثال لزيارة إحدى المناطق $\boxed{a}$، $\boxed{b}$، $\boxed{c}$

كتب دائماً التأكد أن مجموع الاحتمالات يساوي ①

فإذا كان A الحدث الدال على أن نتيجة حجر النرد زوجي فيكون:

$$\underset{\text{زوجي}}{P(A)} = \underset{\text{فردي}}{P(A')} = \frac{1}{2}$$

وبالتالي سيكون:

$$P(H_1) = P(A) = \frac{1}{2}$$

وإذا كان B نتيجة رمي قطعة النقود صورة فإن:

$$\underset{\text{صورة}}{P(B)} = \underset{\text{كتابة}}{P(B')} = \frac{1}{2}$$

وبالتالي سيكون

$$P(H_2) = P(A' \cap B)$$
$$= P(A') \cdot P(B)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(H_3) = P(A' \cap B')$$
$$= P(A') \cdot P(B') = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

للتأكد نلاحظ أن:

$$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \checkmark$$

وإذا دلت D على هطول المطر فإنه حسب قاعدة الاحتمال المركب

$$P(D) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(D) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(D) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(D)$$

حيث $\boxed{P_{H_3}(D) = 0{,}2}$ $\boxed{P_{H_2}(D) = 0{,}4}$ $\boxed{P_{H_1}(D) = 0{,}3}$

حسب دستور بايز فإن:

$$P_D(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(D)}{\sum_{i=1}^{3} P(H_i) \cdot P_{H_i}(D)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot 0,3}{0,3} = \frac{1}{2}$$

الأسئلة المحلولة جميعها مطلوبة. ☺

« الفصل الثالث »

دراسة المتغيرات العشوائية:

تعريف المتغير العشوائي:

ليكن (Ω, F, P) فضاءً احتمالياً و الدالة

$$Y : \Omega \longrightarrow R$$

تدعى متغيراً عشوائياً إذا حققت الشرط:

$$\forall B \subseteq R \; ; \; Y^{-1}(B) \in F$$

أي أن الصورة العكسية لأي مجموعة جزئية من R وفق Y

هي حدث من F في Ω.

لكل متغير عشوائي مجموعة من القيم نرمز لها R_Y

ملاحظة:

* إذا كان فضاء العينة منتهياً أو غير منتهٍ لكنه قابل للعد

منتهٍ ول عن هذا الفضاء أنه منفصلاً (منقطع) والمتغير العشوائي

المولد منه يكون متغيراً عشوائياً منفصلاً (منقطعاً).

$$R_Y = \{1, 2, \ldots, 6\}$$

H

$$R_Y = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

* إذا كان فضاء العينة غير منتهٍ وغير قابل للعد نقول عنه أنه مستمر (متصل) والمتغير العشوائي المولد منه يكون متغيراً عشوائياً مستمراً (متصلاً)

$R_y = \{0, 1\}$

$R_y = \{0, +\infty\}$

$R_y = \{150, 210\}$

تذكير ببعض خواص الصورة العكسية:

إذا كان $Y: E \longrightarrow F$ تطبيقاً وكان $B \subseteq F$ فإن:

الدالة:

$Y^{-1}(B) = \{y : y \in E ; Y(y) \in B\}$

تدعى الصورة العكسية لـ B ومنه Y

ونرمز لها بـ $\underbrace{[Y \in B]}_{\text{حدث}}$ ويكون:

$Y^{-1}(y) = [Y = y]$

مثلاً:

Y	-1	1
Ω	H	T

$[Y = -1] = \{ w \in \Omega : Y(w) = -1 \}$

$= \{H\}$

أيضاً $[Y = 0] = \phi$

$P[Y = -1] \Leftrightarrow P(H)$

أي أن:

أهم خواص الصورة

① $[Y \in \bigcup_i B_i] = \bigcup_i [Y \in B_i]$

② $[Y \in \bigcap_i B] = \bigcap_i [Y \in B_i]$

③ $[Y \in B \setminus A] = [Y \in B] \setminus [Y \in A]$

④ $[Y \in B'] = [Y \in B]$

⑤ $B \subseteq A \Rightarrow [Y \in B] \subseteq [Y \in A]$

⑥ $B \cap R_Y = \phi \Rightarrow [Y \in B] = \phi$

دالة الكثافة الاحتمالية دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منفصل:

نعرف Y متغير عشوائي منفصل مجموعة مديه:

$$R_Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}$$

إن مجموعة كل الأحداث الابتدائية $w \in \Omega$ والتي من أجلها يأخذ المتغير Y القيمة y_i تشكل حدثاً ونرمز له بـ $P[Y = y_i]$

فإن الدالة $f : R \longrightarrow R$ والتي من أجلها يكون

$$f_Y(y_i) = P[Y = y_i]$$

حيث $i = 1, 2, \dots, n, \dots$

تدعى دالة الاحتمال لـ Y أو

دالة الكثافة الاحتمالية لـ Y

وهي تحقق شرطين:

① $f_Y(y) \geq 0 \; ; \; \forall y \in R_y$

② $\sum_{i \geq 1} f_Y(y_i) = 1$

Y	y_1	y_2	...	y_n	...	المجموع
$f_Y(y)$	$f_Y(y_1)$	$f_Y(y_2)$	...	$f_Y(y_n)$	...	1

مثال: تجربة إلقاء ثلاث قطع نقود وبفرض Y يدل على عدد الصور . . Ω ومجموعة قيم Y ودالة الاحتمال له.

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} H & H & H \\ H & H & T \\ H & T & H \\ H & T & T \end{matrix} \right\}$$

ونلاحظ أن:

$$|\Omega| = 2^3 = 8$$

و

$$R_y = \{0, 1, 2, 3\}$$

y	0	1	2	3	مجموع
$f_Y(y)$	$f_Y(0) = \frac{1}{8}$	$f_Y(1) = \frac{3}{8}$	$f_Y(2) = \frac{3}{8}$	$f_Y(3) = \frac{1}{8}$	1

$= P[Y = 0]$

$= P\{TTT\} = P(A)$