م.8، ملاحظة: يمكن لمجموعة نقطية بشكل عام ولمنحني هندسي ذو قوس بسيط بشكل خاص أن تكون هي مجموعة نقطية لعدد من تمثيلات الوسيطية.

أ) ويمكن لنقطة ما من هذه المجموعة قد تكون بسيطة بالنسبة لبعض هذه التمثيلات ومضاعفة لتمثيلات أخرى.

حتى لو فرضنا أن طبيعة نقاط هذه المجموعة واحدة من حيث مرتبة التضاعف بالنسبة لتمثيلين الوسيطين فقد يرد أحد التمثيلين المجموعة المشتركة لهما بترتيب مماثل أو معاكس لترتيب التي يرددها بتمثيل الآخر.

فيما إذا خ ابدا
كان لا يوجد إ
نقاط بسيطة
وبذلك لا مجال
لنقاط مضاعفة

ما سنقوم به الآن:

هو تعريف مفهوم التكافؤ بين تمثيلين وسيطين بحيث يكون لهذين التمثيلين المتكافئين المجموعة النقطية نفسها.

ويكون لأي نقطة من هذه المجموعة مرتبة التضاعف ذاتها بالنسبة لكلا التمثيلين

كما ترد كلا التمثيلين هذه المجموعة بالترتيب ذاته

تعريف:

نقول عن تمثيلين وسيطين

$$\vec{r}_1 : I_1 \to \mathbb{R}^3 \qquad \vec{r}_2 : I_2 \to \mathbb{R}^3$$

$$t \to \vec{r}_1(t) \qquad \tau \to \vec{r}_2(\tau)$$

إنهما متكافئان إذا وجدت دالة $\phi : I_2 \to I_1$

مستمرة ومتزايدة (تماماً)

بحيث يجعل المخطط التالي تبديلي:

$\boxed{t=\phi(\tau)}$

$$\begin{tikzcd} I_1 \arrow[r, "\vec{r}_1"] \arrow[d, leftrightarrow, "\phi"'] & \mathbb{R}^3 \\ I_2 \arrow[ur, "\vec{r}_2"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright", pos=0.7, shift left=4] & \end{tikzcd}$$

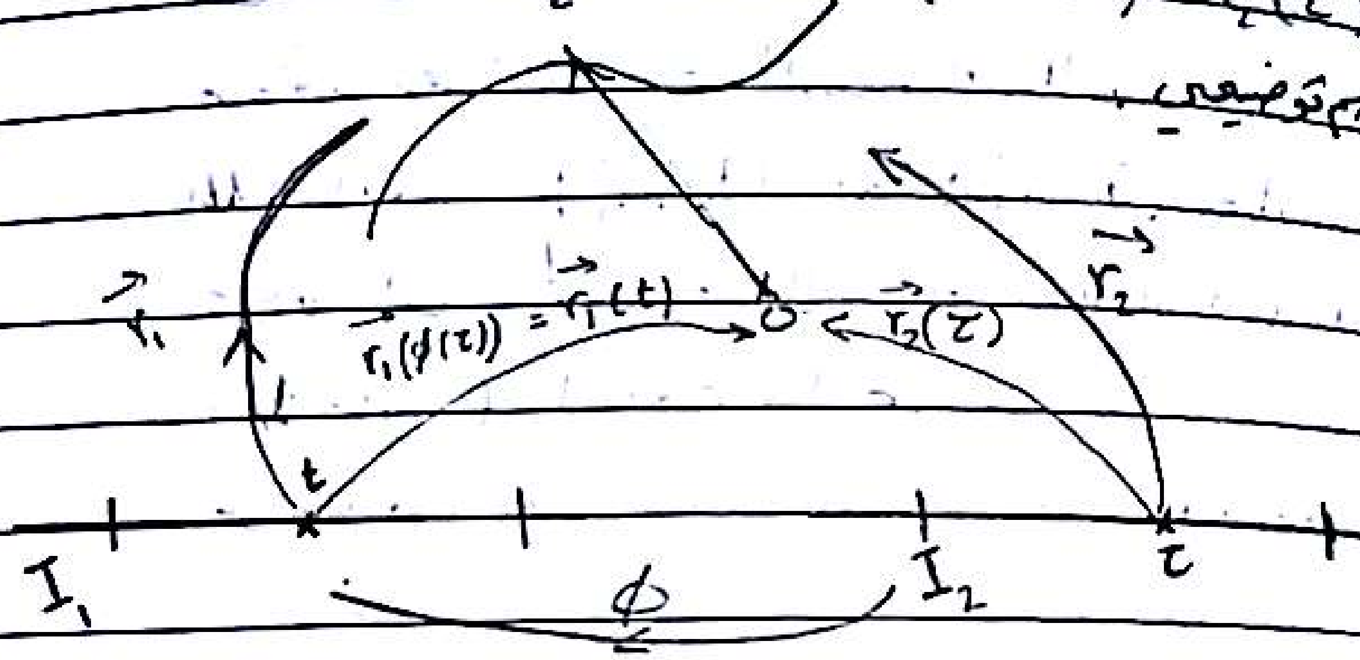
يعني:

$\vec{r}_1 \circ \phi = \vec{r}_2$

هذا يعني

$\vec{r}_1(\phi(\tau)) = \vec{r}_2(\tau) ; \tau \in I_2$

رسم توضيحي



* إذا كانت $t = \phi(\tau)$ فإننا نقول إن t و τ قيمتان متقابلتان لوسيطي $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$

هذا يعني أن τ و t يمثلان النقطة ذاتها في المجموعة النقطية المثبتة.

[illegible]

* إذا كان $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ تمثيلين متكافئين نرمز لذلك $\vec{r}_2 \sim \vec{r}_1$ أو $(I_1, \vec{r}_1) \sim (I_2, \vec{r}_2)$

تمارين:

(انعكاسية، تماثلية، المتعدية)

اثبت أن العلاقة ($\sim$) هي علاقة تكافؤ على مجموعة تمثيلات الوسيطية.

* كون أنها تماثلية: فإن الكتابة التالية صحيحة

$\phi : I_1 \to I_2$

$\vec{r}_1 = \vec{r}_2 \circ \phi$

الان تمثيلين متكافئين

أكيد

2) إذا كان $(I_1, \vec{r}_1)$ مكافئ لـ $(I_2, \vec{r}_2)$ فإن $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$

مجموعة نقطية لهما المجموعة النقطية ذاتها.

3) إذا كان $(I_1, \vec{r}_1)$ مكافئ لـ $(I_2, \vec{r}_2)$ وكانت p نقطة

مضاعفة من المرتبة m بالنسبة لأحد التمثيلين فإنها

ستكون مضاعفة من المرتبة m بالنسبة للآخر.

4) إذا كان $(I_1, \vec{r}_1)$ ~ $(I_2, \vec{r}_2)$ فإن $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$

سيزودان المجموعة النقطية المشتركة لهما بالترتيب (بالتسلسل

نوع التوجيه) بالترتيب ذاته.

شرح حل (4) هنا يعني إذا كانت p_1 ، p_2 نقطتين من المجموعة

النقطية المشتركة لـ $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ أي إذا كان :

$$\vec{op_1} = \vec{r}_1(t_1) = \vec{r}_2(\tau_1)$$

$$\vec{op_2} = \vec{r}_1(t_2) = \vec{r}_2(\tau_2)$$

حيث $t_1, t_2 \in I_1$ و $\tau_1, \tau_2 \in I_2$

ونفرض أن t_1 في I_1 قيمتان متقابلتان للوسيطين $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$

وكذلك τ_1 في I_2 $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$

فالمثبت أنه إذا كان رأس $\vec{r}_1$ يأتي قبل رأس $\vec{r}_1(t_2)$

$(t_1 < t_2)$ في المجموعة النقطية المشتركة فيجب أن رأس $\vec{r}_2(\tau_1)$ يأتي

قبل رأس $\vec{r}_2(\tau_2)$ $(\tau_1 < \tau_2)$

* ϕ متزايد فهو متباين وهو مستمر وغامر فهو تقابل

وله تقابل عكسي تفيد في إثبات (1) علاقة تكافؤ

والغرض يفيد في إثبات أن للتمثيلين المجموعة نقطية

ذاتها.

التمثيلات المتعاكسة: إذا كانت الدالة φ في تعريف التكافؤ بين التمثيلين $\vec{r}_1$ ، $\vec{r}_2$ السابق متناقصة بدل من متزايدة فإننا نقول أن التمثيلين $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ متعاكسان

* من السهل التبيين أن للتمثيلين المتعاكسين المجموعة نقطية ذاتها

وإذا كانت نقطة من مجموعة نقطية مرتبة تسبق س بالنسبة لـ $\vec{r}_1$ فإنها ستكون هي مرتبة تلحق س بالنسبة لـ $\vec{r}_2$ وأخيراً فإن $\vec{r}_1$ يزود المجموعة النقطية بترتيب (بتوجيه) معاكس للتوجيه الذي يزودها به $\vec{r}_2$

الأنسب مجموعة نقطية

ملاحظة: يمكن لمجموعة من النقاط الفضاء أن تكون مجموعة نقطية لتمثيلين غير متكافئين وغير متعاكسين.

* المنحنيات: وكائن هندسي لكن سنعتبره كشيء مستقل عن تمثيل، إن أداتنا الرئيسية لدراسة المنحنيات ستكون التمثيلات الوسيطية بيد أنه يجب عدم تمييز بين تمثيلات متكافئة لذلك سندرس صفوف تكافؤ متمثلين بدلاً من تمثيل وسيطي ذاته

* إن علاقة التكافؤ بين التمثيلات الوسيطية تجزئ هذه المجموعة إلى صفوف تكافؤ:

نسمي أي صف تكافؤ من هذه الصفوف منحنياً موجهاً (اختصاراً منحنياً)

ممثل

* إذا كان L منحنياً معرفاً بالصف التكافؤ $[\vec{r}]$ فإننا نسمي $\vec{r}$ وأي تمثيل ينتمي لهذا الصف (يكافئه) تمثيلاً وسيطياً مسموحاً به (مقبولاً) لـ L

دائرة تمثيلها $(\cos t, \sin t)$ $t\in[0,2\pi]$ هذا التمثيل مسموح للدائرة دائرة مغلقة مسموح مرة واحدة لكن $t\in[0,4\pi]$ هذا غير مقبول لدائرة الواحدة المرسومة مرة واحدة

ملاحظة: تجبر الإشارة أننا سندرس المنحني كصف تكافؤ وليس مجموعة نقاط.

2013/11/31 م 9

مثال: ليكن ℓ دائرة الواحدة المسموحة مرة واحدة بالاتجاه الموجب انطلاقاً من (1,0)

عندئذ: $\ell = [\vec{r}]$ حيث $\vec{r} : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$

إن التمثيل منتظم ومتباين كلياً ومجموعته نقطية الدائرة.

ورأس المتجهة $\vec{r}(t)$ يمسح الدائرة مرة واحدة بالاتجاه الموجب

انطلاقاً من نقطة (1,0).

إن التمثيل الوسيطي $\vec{r}_1 : [0,4\pi] \to \mathbb{R}^2$

$\vec{r}_1(t) = (\cos t, \sin t)$

تمثيل غير مسموح به.

علماً أن $\vec{r}$ تمثيل المسموح به لـ ℓ فالتمثيلان

$\vec{r}$ ، $\vec{r}_1$ (أثبت أنهما غير متكافئين باستخدام تعريف)

ملاحظة: نفرض جدلاً أنهما متكافئين ونتابع حتى نصل إلى حالة ثم يؤديا إلى التناقض ومنها غير متكافئين

حسب التمرين (3) في المحاضرة السابقة

لكن (1,0) هي ℓ بسيطة بالنسبة لـ $\vec{r}$

لأنها تقابل قيمة وحيدة هي $\vec{r}^{-1}(\vec{op}) = \{\frac{\pi}{2}\}$

حيث يتحقق $\vec{r}(\frac{\pi}{2}) = (\cos\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2}) = (0,1)$

$\forall t \in [0,2\pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\} , \vec{r}(t) \neq \vec{op}$

ولكن (1,0) هي مضاعفة من المرتبة الثانية بالنسبة لـ $\vec{r}_1$

يكون عنصر من صف تكافؤ لذلك إن هذا العنصر يكون عنصر من الصف ولكن لن يكون من صف تكافؤ ويملك صفات صف

*عتبيانية سؤال ماهو مبدأ ℓ؟ يكون $[-\pi,\pi]$ فيكون انطلاقاً من (-1,0)

بينما $\vec{r}_1(\frac{\pi}{2}) = \vec{r}_1(\frac{3\pi}{2}) = \vec{OP}$

$\forall t \in [0, 4\pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\}, \vec{r}(t) \neq \vec{OP}$ ∧

⇐ $\vec{r}_1 \nsim \vec{r}$ ⇐ $\vec{r}_1$ غير مسموح بها لـ $\ell[\vec{r}]$

حيث $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$

دوران الدائرة مرتين (ب،ب).

هل وجود تمثيلين [illegible] مجموعة نقطية؟

المجموعة النقطية لتمثيلين متكافئين هي نفس لكن العكس غير صحيح فيمكن أن يكون لتمثيلين غير متكافئين نفس المجموعة النقطية

مثال: ليكن ℓ المنحنى الممثل بـ $\vec{r}$ حيث

$t \in [0, 2\pi]$: $\vec{r}(\cos t, \sin t)$

هل التمثيل $\vec{r}_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ المعرف بالشكل

$\vec{r}_2(\tau) = (\cos\tau, -\sin\tau)$

هو تمثيل مسموح به لـ ℓ.

- * الفرق هندسياً بين $\vec{r}_2$ و $\vec{r}$ التمثيل الهندسي لـ $\vec{r}$ يمسح دا[illegible] عكس عقارب الساعة [illegible] التمثيل الهندسي لـ $\vec{r}_2$ يمسح دائرة مع عقارب الساعة بالاتجاه نثبت أن $\vec{r}, \vec{r}_2$ تمثيلان متعاكسان و $\vec{r}_2 \nsim \vec{r}$ حسب تعريف

لناخذ $P_1(1,0)$ و $(0,1) = P_2$ كل منهما بسيطة في كلا التمثيلين

$\vec{OP} = (-1,0) = (\cos(\pi), \sin(\pi))$ $\vec{r}(t)$

$t=\pi$ هي القيمة الوحيدة لـ $\vec{r}$ المقابلة لـ P

$\vec{r}(\frac{\pi}{2}) = (0,1) = \vec{OP}$

$\vec{r}_2(\pi) = (\cos\pi, \sin\pi) = (-1,0) = \vec{p}_1$

بما أن $\frac{\pi}{2} < \pi$ فإن p_2 تأتي قبل p_1 بالنسبة لـ $\vec{r}$

$\vec{r}_2 : (\cos\frac{3\pi}{2}, -\sin\frac{3\pi}{2})$

$= (0, -(-1)) = (0,1) = \vec{p}_2$

بما أن $\pi < \frac{3\pi}{2}$ فإن p_1 يأتي قبل p_2 بالنسبة للترتيب

الذي يزود $\vec{r}_2$ المجموعة النقطية المشتركة لـ $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ به

تعاريف:

1. ليكن $\vec{r}_1 : I_1 \to R^3$ و $\vec{r}_2 : I_2 \to R^3$ تمثيلين وسيطين صحيح بها لمنحنى ℓ فإننا نقول أن الثنائيتين $(t, r_1(t))$ و $(\tau, \vec{r}_2(\tau))$ تمثلان النقطة ذاتها من ℓ إذا كان $t = \phi(\tau)$ حيث ϕ هي الدالة الموجودة في تعريف التمثيلين متكافئين

2. إذا كان أحد تمثيلات من ℓ معرفة على مجال مغلق فإننا نسمي المنحنى ℓ منحنى متراص (أطراف المنحنى ستكون منتمية له.

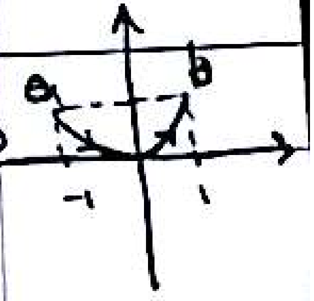
مثال: دائرة الواحدة الموجهة مرة واحدة بالاتجاه موجب منحنى متراص تمثيله $\vec{r} : [0, 2\pi] \to R^2$

3. أما إذا كان أحد تمثيلات منحنى ℓ معرف على مجال مفتوح فإننا نسمي ℓ منحنياً مفتوحاً (وليس يعني مجموعة مفتوحة وإنما أطراف منحنى ليست منه).

مثال: إن المنحنى الممثل بـ $\vec{r}(t) = (t, t^2)$ حيث $-1 < t < 1$

مقوس مفتوح من طرفيه r

هو منحنى مفتوح إن المنحنى الممثل بـ r هو مقوس من طرفيه من الرسم



جانباً و المسموح مرة واحدة من نقطة a إلى نقطة b من الـ $a(-1,1)$ وَ $(1,1)$ b وذلك بدون الأطراف.

لو جعلنا $-1 \le t \le 1$ لكان منحنى منحنى خاص وسيكون قوس القطع المكافئ $y = x^2$ المسموح من نقطة a إلى b حيث طرفاه a وَ b منتميان إليه.

* تمرين 1: اثبت أن كل منحنى خاص يقبل تمثيلاً وسيطياً مسموحاً به معرف على مجال مغلق $[0,1]$.

تمرين 2: اثبت أن كل منحنى مفتوح يقبل تمثيلاً وسيطياً مسموحاً به معرف على مجال مفتوح $]0,1[$

* **تعريف:** نقول عن منحنى مفتوح إنه من الصف C^n حيث $n \ge 1$ إذا كان بين تمثيلاته المسموح بها واحد على الأقل $\vec{r}:]a,b[\to R^3$ من الصف C^n.

تمرين 3: إذا كان ℓ منحنياً مفتوحاً فاثبت أن جميع تمثيلاته يكون معرفة على مجال مفتوح.

* **تعريف:** نقول عن منحنى مفتوح إنه نظامي إذا كان بين تمثيلاته المسموح بها واحد على الأقل $\vec{r}:]a,b[\to R^3$ قابلاً للاشتقاق على $]a,b[$ وكان $\vec{r}'(t) \ne 0$ وذلك $\forall t \in]a,b[$

* **تعريف:** نقول عن منحنى مفتوح إنه نظامي من الصف C^n حيث $(n \ge 1)$ إذا كان بين تمثيلاته المسموح بها واحد على الأقل $\vec{r}:]a,b[\to R^3$ من صف C^n وكان $\vec{r}'(t) \ne 0$ وذلك $\forall t \in]a,b[$

هذا التعريف بالتمثيل يعطي صفتين هما نظامي ومن الصف C^n، نفسه

قد يوجد تمثيلين [illegible] لكن كل واحد منهم منتظم [illegible] ولكنهما [illegible] رتبة

تمثيل نظامي أنه نظامي فقط [illegible] من الصف C^n

* من الواضح أن منحنياً نظامياً من الصف C^n يكون نظامياً
من الصف C^k وذلك $\forall k \leq n$

2016/11/2

م ١٠

مثال: إن المنحني $\mathcal{L}$ الممثل بـ $\vec{r}(t) = (t, t^2)$
حيث $t \in]-1,1[$ منحني نظامي من الصف C^∞ (نظامي تحليلي
إن $\vec{r}$ من الصف C^∞ لأن كلا مركبتين لـ $\vec{r}$ من الصف C_ω حيث
∞ (تحليليتين)
كل من مركبتين كثير حدود.

منقول عن حالة إنها من صف C^∞ إذا كانت لا عدد غير منتهي من مرات الاشتقاق

و $\vec{r}$ نظامي لأن: $\vec{r}$ معرف على مجال مفتوح $]-1,1[$
كما أن $\vec{r}'(t) = (1, 2t) \neq 0$
$\forall t \in]-1,1[$ ؛
وإن $\mathcal{L}$ منحني مفتوح لأن تمثيله $\vec{r}$ معرف على مجال مفتوح.
$\Leftarrow$ $\mathcal{L}$ منحني نظامي من الصف C^∞.

كل تحليلي هو من الصف C^∞ لكن العكس غير صحيح

Note: نظامي من الصف: أي تمثيل وحيد للمنحني ويملك صفتين بينما نظامي من الصف ما فقد يكون تمثيل نظامي ومن صف معين وتمثيل آخر نظامي لكن من صنف آخر.

تعريف: نقول عن منحني $\mathcal{L}$ (فرد نوع منحني) إنه نظامي من الصف C_n ($n \geq 1$)
قطعياً إذا وجد لـ $\mathcal{L}$ تمثيل موسط $\vec{r}: I \to R^3$
حيث I مجال طرفاه a, b $(a<b)$ وتجزئة للمجال I
$t_0 = a < t_1 < \ldots < t_m = b$
بحيث يمكن تحديد $\vec{r}$ إلى دالة من الصف C_n ويحقق
$\vec{r}'(t) \neq 0 \;; \forall t \in \{t_0, \ldots, t_m\}$ الشرط $|_{]t_{k-1}, t_k[}$
مجال جزئي

أصبح منحني على كل مجال جزئية نظامي أي أصبح عبارة عن مجموعة منتهية من منحنيات النظامية.

المتطابقة وهذا يعني أن المشتق من المرتبة n غير صفر أو غير موجود أو أن
يكون $\vec{r}(t)$ غير معرف أو $\vec{r}'(t)$ غير موجود عند النقاط $t_1, t_2, \ldots, t_m$
موجود بينها على التكرار.

[illegible] * كل منحنى نظامي من الصنف C^n هو منحنى نظامي من صنف C_n قطعياً.

* إذا كانت $\vec{r}'(t)$ غير موجود أو موجود ولكنه منعدم فإننا نسمي النقطة t_0 أو $\vec{r}(t_0)$ أو $(t_0, \vec{r}(t_0))$ نقطة شاذة للمنحنى f في تمثيل $\vec{r}$.

مثال: المنحنى

في المنحنى الأول t_1 ليست نقطة شاذة لأن المستقيم منحنى أملس وهو قابل للاشتقاق

بينما المنحنى الثاني t_1 نقطة شاذة لأن رأس الزاوية لا يعين مشتق
وعليه تعتبر t_1 و t_1 نقطتين متنافيتين

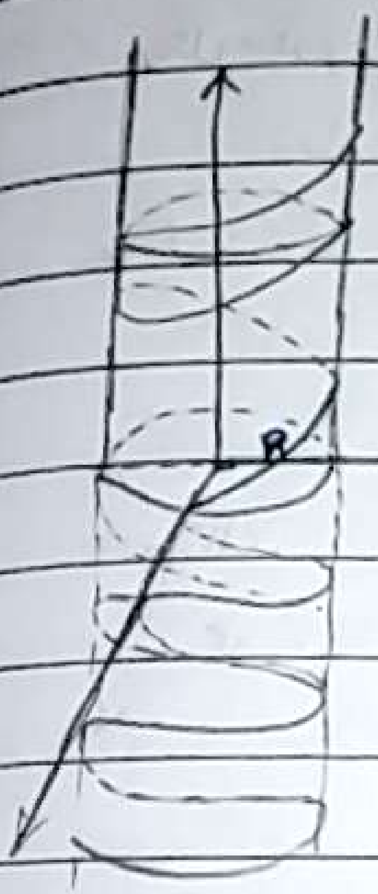
* إذا كانت النقطة $\vec{r}(t_0) = p$ شاذة بالنسبة لتمثيل وغير شاذة بالنسبة لتمثيل آخر مكافئ له فإننا نسمي هذه النقطة نقطة شاذة غير أساسية للمنحنى (المنحنى وضح شكل التمثيلين السابقين). أما إذا كانت النقطة شاذة بالنسبة لجميع تمثيلات المتكافئة عند القيم المتقابلة للوسيط فإننا نسمي هذه النقطة نقطة شاذة أساسية للمنحنى، ونقول أن للمنحنى شذوذاً أساسياً عند تلك النقطة.

رقائب وعدم
الفعام فقش
صدريا وعود
محاسن
شنص

أمثلة: **منحنى اللولب:**

تعريف اللولب: هو مسار نقطة تتحرك بسرعة ثابتة على مولد الأسطوانة تدور بسرعة ثابتة حول محورها

من
دمشق
شادين



إذا زودنا الفضاء بجملة محاور أصلية حيث يكون المحور oz منطبقاً على محور الأسطوانة وموجهاً بجهة حركة النقطة على المحور وبحيث يمر $\vec{ox}$ من الموضع الابتدائي للنقطة المتحركة →

فإن معادلات الحركة ستكون:

$$\vec{r}_1 \left\{ \begin{array}{l} x = R\cos(wt) \\ y = R\sin(wt) \\ z = vt \end{array} \right\}$$

حيث R نصف القطر الأسطوانة و w سرعة زاوية للأسطوانة ، v سرعة النقطة على المولد.

عندئذ سيكون $\vec{r}(t)=(R\cos t, R\sin t, bt)$ حيث $t\in\mathbb{R}$

إثبات أن $\vec{r}_1$ و $\vec{r}$ متكافئ

و $b=\frac{v}{w}$ $\neq 0$ ← الدكتور ص لسرعة النقطة للولب)) → → لأنه لو ساوت صفر لتحولت إلى نقطة

أولاً: اللولب منحني مفتوح لأن تمثيله معرف على مجال مفتوح $\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$

ثانياً: اللولب منحني من الصف C^∞ لأن جميع مركبات $\vec{r}$ من الصف C^∞

ثالثاً: اللولب منحني نظامي لأن $\vec{r}\,'$ موجود على $\mathbb{R}$ ($\vec{r}$ قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}$) ولدينا $\vec{r}\,'(t)=(-R\sin t, R\cos t, b)\neq\vec{0}$

$\forall t\in\mathbb{R}$

بما أن $R \neq 0$ ، $b \neq 0$ كما أن sin و cos لا يمكن أن ينعدما معاً فإن: $\sqrt{R^2+b^2} \neq 0$ ؛ $\|\vec{r'}(t)\| = \sqrt{}$

وحسب خاصية $\|\vec{r'}\| \neq 0 \Leftarrow$ $\vec{r'}(t) \neq 0$

رابعاً: أن اللولب نظامي من الصف C^∞ كما يمكن القول أنه نظامي من الصف C^∞.

خامساً: أن اللولب نظامي تحليلي لأنه مركبات تمثيله تحليلية على $\mathbb{R}$.

المنحني الدويري (السيكلوئيد):