المعادلات التفاضلية 1

الأستاذ : عبد الله المليح

المحاضرة : الخامسة (عملي)

التاريخ : ٢٠١٦/١١/٦

إعداد : محمد شهلا & فادي الشريطي

مرحبا أصدقائي لقد بدأنا هذه المحاضرة بمثال على المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى ومعادلات تفاضلية من المرتبة n أي معادلة بارنولي.....

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(cosx)^2\, y' + y = tanx$$

الحل: نلاحظ أن بقسمة الطرفين على $(cosx)^2 \neq 0$ تصبح معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى شكلها المألوف $y' + p(x)y = q(x)$

ومنه بعد القسمة

$$y' + \frac{1}{(cosx)^2}\, y = \frac{1}{(cosx)^2}\, tanx \ldots \ldots .. (\&)$$

كما تعلمنا لحل المعادلة التفاضلية الخطية في البداية نحلها بدون طرف ثاني أي q(x)=0 ومن ثم نحلها مع طرف ثاني بوجود q(x)

أولاً q(x)=0

$$y' + \frac{1}{(cosx)^2}\, y = 0 \to \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{(cosx)^2} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{1}{(cosx)^2}\, dx$$

وبمكاملة الطرفين لإيجاد الحل العام

$$\int \frac{dy}{y} = \int -\frac{1}{(cosx)^2}\, dx$$

$$\ln|y| = -tanx + \ln|c|$$

$$\ln|y| - \ln|c| = -tanx \xRightarrow{\text{بالإصلاح}} \ln\left|\frac{y}{c}\right| = -tanx$$

وباستخدام الدالة العكسية للوغاريتم $\frac{y}{c} = e^{-tanx} \Rightarrow y = c\, e^{-tanx}$

ثانياً: q(x)≠0

نضع c=c(x) تابع ل x ونوجد المشتق

$$y = c(x)e^{-tanx}$$

$$y' = c'(x)e^{-tanx} + \left(-\frac{1}{(cosx)^2}\right)e^{-tanx}\,c(x)$$

ملاحظة هامة: دائما عندما نوجد المشتق نعوضه بالمعادلة الأصل (&)

والآن نعوض ’y و y في (&).......

$$c'(x)e^{-tanx} + \left(-\frac{1}{(cosx)^2}\right)e^{-tanx}\,c(x) + \frac{1}{(cosx)^2}\,c(x)e^{-tanx} = \frac{1}{(cosx)^2}tanx$$

ومنه وبعد الإصلاح نجد

$$c'(x)e^{-tanx} = \frac{1}{(cosx)^2}tanx$$

$$c'(x) = \frac{1}{(cosx)^2}tanx\;e^{tanx}$$

ومنه

$$c(x) = \int\left(\frac{1}{(cosx)^2}\right)tanx\;e^{tanx}\;dx$$

واضح أنه للسهولة سنفرض tanx =t وبالاشتقاق $\frac{1}{cos^2x}dx = dt$

ونلاحظ أن المشتق موجود بعبارة التكامل فقط بقي أن نعوض

$$c(x) = \int t\,e^t\,dt$$

كما مر معنا (سابقاً) سنكامل بطريقة التجزئة بفرض

$$u = t \rightarrow du = dy$$
$$dv = e^t \rightarrow v = e^t$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int te^t\,dt = te^t - \int e^t\,dt = te^t - e^t = (t-1)e^t$$

وبالعودة إلى المتحول x

$$c(x) = (tanx - 1)e^{tanx}$$

ومنه الحل الخاص $y_0 = (tanx - 1)e^{tanx}\,.\,e^{-tanx} = tanx - 1$

وينتج الحل الخاص بتعويض قيمة c(x) في الحل العام ^_^

تمرين: أوجد حل المعادلة $3x^2y' - 3x^2y = -y^4$

الحل : ! بالقسمة على $3x^2 \neq 0$

$$y' - \frac{1}{x}y = -\frac{1}{3}\,x^{-3}\,y^4 \;..............(\&)$$

!! بالمقارنة مع شكل معادلة بارنولي

$$y' + p(x) = q(x)y^n$$

ولحلها نقسم طرفي المعادلة (&) على $y^n = y^4 \neq 0$

$$y'y^{-4} - \frac{1}{x}\,y^{-3} = -\frac{1}{3}\,x^{-3}\;............(\$)$$

!!! نضع الآن $z = y^{-3}$ ثم نشتق الطرفين ←

$$z' = -3y^{-4}\,y'$$

ومنه

$$y'y^{-4} = -\frac{1}{3}\,z'$$

نعوض في المعادلة ($)

$$-\frac{1}{3}\,z' - \frac{1}{x}\,z = -\frac{1}{3}\,x^{-3}$$

نضرب ب -٣

$$z' + \frac{3}{x}z = x^{-3}\;\ldots\ldots\ldots..(@)$$

عدنا إلى المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى نحلها على خطوتين........

الخطوة الأولى $q(x)=0$

$$z' + \frac{3}{x}z = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{3}{x}z \rightarrow \frac{dz}{z} = -3\frac{dx}{x}$$

بالمكاملة

$$\int \frac{dz}{z} = -3\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|z| = -3\ln|x| + \ln|c|$$

$$\ln|z| = -\ln|x^3| + \ln|c| \rightarrow \ln|z| = \ln\left|\frac{c}{x^3}\right| \rightarrow z = \frac{c}{x^3}$$

الخطوة الثانية نضع $c=c(x)$

$$z = \frac{c(x)}{x^3}$$

ونشتق الطرفين بالنسبة ل X

$$z' = c'(x)x^{-3} + (-3)x^{-4}\,c(x)$$

والآن .... نعوض المشتق في (@) المعادلة الأصل

$$c'(x)x^{-3} - 3x^{-4}c(x) + 3c(x)x^{-4} = \frac{1}{x^3}$$

$$c'(x)x^{-3} = x^{-3} \rightarrow \; c'(x) = 1$$

بالمكاملة

$$c(x) = x$$

والحل الخاص هو......... $y_0 = \frac{c(x)}{x^3} \rightarrow \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$

والآن أصدقائي سوف ندرس أنواع المعادلات التفاضلية من خلال المخطط الآتي...

المعادلات التفاضلية

عادية

جزئية

سوف ندرسها بمقررات لاحقة

مرتبة أولى

مراتب عليا

$$F\left(x, y, y', y'', \dots \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

سندرسها في مقررنا هذا ولكن في فصول قادمة

Coming soon ^___^

محلولة بالنسبة للمشتق

يمكن عزل المشتق وتكون درجته الأولى وتكون المعادلة من الشكل

$$y' = f(x, y)$$

أو من الأشكال التي سوف نوردها بالمخطط (١) والمخطط (٣)

غير محلولة بالنسبة للمشتق

لا يمكن عزل المشتق وستتعدى درجته الواحد

المخطط (١)

وتكون المعادلة من الشكل

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

١_ منفصلة:

أي يمكن عزل كل متحول على حدى

$$p(x)dx + q(y)dy = 0$$

٢_ ترد إلى منفصلة:

أي من الشكل: $y' = f(ax + by + c)$

ولردها إلى منفصلة نفرض : $ax + by + c = z$

بالتفاضل ← $dz = adx + bdy$

بالقسمة على dx : $z' = a + by'$

٣_متجانسة:

يمكن إرجاع المعادلة التفاضلية إلى متحولات قابلة للفصل بإجراء التبديل $z = \frac{y}{x}$

وسنكتبها على الشكل $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

ومتجانسة من الدرجة n أي

$$F(\alpha x, \alpha y) = \alpha^n F(x,y)$$

٤_ ترد إلى متجانسة:

شكلها $f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

حيث $D_1: a_1x + b_1y + c_1$

$D_2: a_2x + b_2y + c_2$

مستقيمان وعند رد المعادلة إلى متجانسة سنواجه الحالات الآتية......سنوردها بالمخطط(٢)

المخطط(٢)

الحالة(١) المستقيمين منطبقين:

$$a_1x+b_1y+c_1=\alpha a_2x+\alpha b_2y+\alpha c_2$$

$$a_1x+b_1y+c_1=\alpha(a_1x+b_1y+c_1)$$

$$f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\alpha(a_1x+b_1y+c_1)}\right)$$

$$=f(\alpha)\quad or=f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$y'=f(\alpha)\to\frac{dy}{dx}=f(\alpha)\to dy=f(\alpha)dx$$

بالمكاملة $y=f(\alpha)x$

الحالة (٢) المستقيمان متوازيان:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\alpha:c_1\neq c_2$$

$$f\left(\frac{\alpha(a_2x+b_2y)+c_1}{(a_2x+b_2y)+c_2}\right)$$

وفي هذه الحالة نفرض $z=a_2x+b_2y$

الحالة(٣) المستقيمان متقاطعان

نوجد نقطة التقاطع (x_0,y_0) وعندئذ نجعل

$$x=X+x_0\ \&\&\ y=Y+y_0$$

المخطط(٣)

٥_خطية: من الشكل

$$y'+p(x)y=q(x)$$

نحلها على خطوتين:

١_بدون طرف ثان أي $q(x)=0$

ويكون y_1 هو الحل العام

٢_مع طرف ثان بجعل $c=c(x)$ ويكون y_0

هو الحل الخاص بحيث $y=y_0+y_1$

والحل الأخير

٦_ برنولي: تشبه الخطية من الشكل

$$\boldsymbol{y'+p(x)y=q(x)y^n:n\neq 0}\ \&n\neq 1$$

نقسم على $y^n\neq 0$ ومنه $y'y^{-n}+p(x)y^{1-n}=q(x)$

نفرض الآن $z=y^{1-n}\to z'=(1-n)y^{-n}y'$

$$y'y^{-n}=\frac{z'}{1-n}$$

ومن الفرض $n\neq 1$ لأنها ستردّ إلى معادلة ذات متحولات قابلة للفصل وبتعويض $y^{1-n},y'y^{-n}$ بما يساويهما من المتحول z سترد إلى خطية من السهل حلها

ومنها أيضاً ....

١_المعادلات التفاضلية التامة : وهي من الشكل $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \dots (\#)$$

إذا تحقق الشرط (#) تكون تامة ونكمل دراستنا كما مر معنا بالمحاضرة السابقة...^__^

٢_المعادلات التفاضلية غير التامة: وهي تحقق ....

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{y}} \neq \frac{\partial \boldsymbol{N}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{x}}$$

ولحلها،،، نوجد الفرق $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$ **وسنجرب أن نقسمه على(N) و (-M)**

في البداية على N إذا كان $\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N} = \varphi(x)$ أي تابع يحوي x فقط...

عندئذ عامل التكميل μ يكون من الشكل ......

$$\frac{\mu\partial}{u} = \varphi(x)dx$$

بالمكاملة نجد $\mu = e^{\int \varphi(x)dx}$

أما في حالة القسمة على (-M) وكان ناتج القسمة تابع يحوي (y) فقط فعامل التكميل μ هو من الشكل

$$\frac{\partial \mu}{\mu} = \varphi(y)dy \xRightarrow{\text{بالمكاملة}} \mu = e^{\int \varphi(y)dy}$$

مثال على ما سبق: أوجد عامل التكميل للمعادلة $(x^2+y^2+2y)dx + x(y+1)dy = 0$

$$M(x,y) = x^2+y^2+2y \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2y+2$$

$$N(x,y) = x(y+1) \rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = y+1$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \rightarrow \text{غير تامة}$$

والآن لنوجد الفرق

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2y+2-(y+1) = y+1}$$

لنقسم على (N) ومنه نجد $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{y+1}{n(y+1)} = \frac{1}{x}$

تابع يحوي x فقط ومنه عامل التكميل $\frac{\partial \mu}{\mu} = \varphi(x)dx = \frac{1}{x}dx$

نكامل الطرفين بالنسبة لـ(x) $\ln|\mu| = \ln|x| \rightarrow \mu = x$

وهو عامل التكميل ......

والآن نضرب عامل التكميل ب N و M كي تصبح تامة ألا وتصبح

$$(x^3+y^2x+2yx)dx + x^2(y+1)dy = 0$$

(!!تذكرة !!): عامل التكميل هو دالة إذا ضربناه بطرفي المعادلة التفاضلية غير التامة أصبحت تامة