التحليل 3

الدكتور : يحيى قطيش

المحاضرة : التاسعة

التاريخ : ٢٠١٦/١١/٩

تعريف متسلسلة القوى:

متسلسلة القوى هي متسلسلة توابع لها الشكل التفصيلي الآتي:

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n$$

ولها الشكل المختصر الآتي:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

حيث a عدد ثابت يدعى مركز متسلسلة القوى وحيث:

$c_0 , c_1 , c_2 , \dots c_n$ أعداد تدعى أمثال متسلسلة القوى.

أمثلة:

١) إن مركز متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n(x-1)^n$ هو $a = 1$

٢) إن مركز متسلسلة القوى $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$ هو $a = 0$

٣) إن مركز متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}(x+2)^n$ هو $a = -2$

لكل متسلسلة قوى مجال تقارب نصف قطره ρ أي أن ρ هو نصف طول المجال الذي تتقارب عليه متسلسلة القوى المعطاة و لما كان a مركز تقارب هذه المتسلسلة فإن مجال التقارب الآنف الذكر هو المجال $]a-\rho, a+\rho[$ و تكون عندئذٍ المتسلسلة متقاربة باطلاق من أجل كل x تنتمي إلى المجال المفتوح $]a-\rho, a+\rho[$ أما عند أطراف المجال فنواجه حالات شك .. حيث أن متسلسلة القوى قد تتقارب عند أحد طرفي المجال أو كلاهما و قد تتباعد لذا سنكون بحاجة إلى دراسة تقارب المتسلسلة عند طرفي المجال

مثال :

لنوجد مجال تقارب المتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

و هي متسلسلة قوى مركزها $x = 0$:

بداية نلاحظ أن المتسلسلة متقاربة من أجل $x=0$ و مجموعها :

$$\left.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right|_{x=0}=1+0+\frac{0}{2!}+\frac{0}{3!}+\cdots=1$$

عندما $x\neq 0$ لنطبق معيار دالمبير :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}=0<1\ \forall x\in R$$

فحسب معيار دالمبير تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ متقاربة على كامل R أي أن مجال تقاربها $R=]-\infty,+\infty[$ و بالتالي نصف قطر التقارب $\rho=\infty$

##إضافي :

لاحظ أننا درسنا في مقرر التحليل ١ أن تابع المجموع للمتسلسلة السابقة هو :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x,\forall x\in R$$

فمتسلسلة القوى السابقة متقاربة من التابع الأسي من أجل جميع قيم x من R و لاحظ عندما $x=0$ فإن :

$$\left.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right|_{x=0}=1=\mathrm{e}^0$$

و هذا يتوافق مع ما نتج معنا قبل قليل .

نتائج :

١- حدود متسلسلة القوى معرفة و مستمرة و قابلة للاشتقاق على مجال تقاربها
٢- كل متسلسلة قوى مثل $\sum c_n(x-a)^n$ متقاربة من أجل المركز $x=a$
٣- يمكن رد أي متسلسلة قوى مركزها a مثل $\sum c_n(x-a)^n$ إلى متسلسلة قوى مركزها $x=0$ و ذلك بوضع $y=x-a$

ملاحظة: سنقوم بدراسة كل ما يخص متسلسلات القوى على المتسلسلات التي مركزها الصفر و ذلك لأن حسب النتيجة الأخيرة يمكن رد أي متسلسلة قوى إلى متسلسلة قوى مركزها الصفر

مبرهنة :

لتكن $\sum c_n x^n$ متسلسلة قوى معرفة على I :

١- إذا كانت هذه المتسلسلة متقربة من أجل قيمة معينة $x = x_0 \neq 0$ فإنها تتقارب من أجل جميع قيم x التي تحقق المتراجحة : $|x| < |x_0|$ و التي تكافئ أن :

$$-|x_0| < x < |x_0| \Rightarrow x \in]-|x_0|,|x_0|[$$

و من ثم ندرس المتسلسلة عند طرفي المجال و ذلك لنتبين فيما إذا كان إحدى طرفي المجال أو كلاهما ينتمي إلى مجال التقارب أم لا

٢- إذا كانت المتسلسلة $\sum c_n x^n$ متباعدة من أجل قيمة معينة $x = x_0 \neq 0$ فإنها تتباعد من أجل جميع قيم x التي تحقق المتراجحة : $|x| > |x_0|$ و التي تكافئ أن :

$$x > |x_0| \quad or \quad x < -|x_0| \Rightarrow x \in]-\infty, -|x_0|[U]|x_0|, +\infty[$$

نتيجة : إذا كان $\rho = 0$ فإن مجال تقارب المتسلسلة $\sum c_n (x-a)^n$ هو $[a,a]$ أي هي متقاربة فقط عند المركز و يمكن أن نصطلح أنه إذا كان $\rho = 0$ فنقول عن المتسلسلة أنها متباعدة.

طرق إيجاد نصف قطر التقارب:

يمكن استعمال اختبار دالامبير أو اختبار الجذر النوني كما يأتي:

دالمبير :

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ متسلسلة قوى بحيث أن $c_n \neq 0$ من اجل جميع قيم $n \geq 0$

وبفرض وجود النهاية $D = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ ومن ثم:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}.x^{n+1}}{c_n.x^n}\right| = |x|.D$$

و لناقش ما يلي : حتى تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ متقاربة حسب معيار دالمبير يجب أن تكون قيمة النهاية السابقة أصغر من الواحد أي : $|x|.D$ و لنميز الحالات التالية :

١- إذا $D = 0$ فنجد أن : $|x|.D = 0 \;\; \forall x \in R$ فتكون متقاربة و مجال تقاربها هو $R =]-\infty, +\infty[$ و نصف قطر التقارب هنا $\rho = +\infty$

٢- إذا كان $D \neq 0$ فتتقارب المتسلسلة عندما و فقط عندما $|x|.D < 1$ و هذا يكافئ :

$$-\frac{1}{D} < x < \frac{1}{D}$$

و بالتالي يكون مجال التقارب في هذه الحالة $\left]-\frac{1}{D}, \frac{1}{D}\right[$ و نصف قطر التقارب هو $\rho = \frac{1}{D}$

٣- أما إذا كان $|x|.D > 1$ فتكون المتسلسلة متباعدة

٤- في حالة $D = +\infty$ عندئذٍ تكون المتسلسلة متباعدة من أجل جميع قيم $x \in R^*$ و متقاربة فقط عند المركز $x = 0$

خلاصة : يمكن حساب نصف قطر أي متسلسلة قوى بالاستفادة من معيار دالمبير من العلاقة :

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \frac{1}{D}$$

((تحقق أن هذه العلاقة تحقق الحالات السابقة كلها))

كوشي : لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$ متسلسلة قوى بحيث أن $c_n \neq 0$ من اجل جميع قيم $n \geq 0$

وبفرض وجود النهاية $C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ ومن ثم:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = |x|C$$

و نناقش نفس الحالات السابقة و نخلص إلى أن : $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{C}$

ملاحظة هامة :

قبل البدء بدراسة أي متسلسلة قوى و تطبيق أي معيار يجب أن نأخذ سلسلة القيم المطلقة و نطبق عليها دراستنا لأنه و كما نعلم أن جميع المعاير السابقة تتطبق على المتسلسلات ذات الحدود الموجبة .

أمثلة :

أوجد منطقة التقارب لكل من متسلسلات القوى الآتية:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{1}{n} . x^n$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|=1$$

مجال تقارب المتسلسلة $]-1,1[$ ((حسب القاعدة $]a-\rho,a+\rho[$))

➢ندرس التقارب عند $x=1$ يتم الحصول على المتسلسلة المتباعدة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

➢وعندما $x=-1$ يتم الحصول على المتسلسلة المتقاربة شرطياً $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

سبب أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ متقاربة شرطياً:

$\sum\frac{1}{n}$ متباعدة. نطبق معيار ليبنتز:

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|=\frac{1}{n}$$

١) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

٢) $a_n\le a_{n+1}\Leftarrow\frac{1}{n}\le\frac{1}{n+1}\Leftarrow\frac{1}{n}$ متناقصة ومنه $\sum\frac{1}{n}$ متباعدة $\Leftarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ متقاربة شرطياً.

إذاً فمنطقة التقارب لهذه المتسلسلة هي $[-1,1[$

وكما قلنا سابقاً مغلق عند -1 لأنه متقارب شرطياً عندها.

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}.x^n$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1).n!}{n!}\right|=\lim_{n\to\infty}(n+1)=+\infty$$

مجال التقارب هو $\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$

3) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n-2)}.x^n$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n-1)}{n(n-2)} = 1$$

مجال التقارب هو $]-1,1[$

ندرس تقارب المتسلسلة عند طرفي المجال:

- عندما $x = 1$ يتم الحصول على المتسلسلة $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n-2)}$

و متقاربة فهي متقاربة بإطلاق ما يلي :

$$\sum_{n=3}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n(n-2)}\right| = \frac{1}{n(n-2)}$$

$$a_n = \frac{1}{n^2}\ ,\quad b_n = \frac{1}{n(n-2)}$$

نطبق معيار نهاية النسبة:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n(n-2)}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n^2-2n} = 1$$

المتسلسلتين من نوع واحد وحسب معيار نهاية النسبة ولأن:

$$\sum\frac{1}{n^2}$$

متقاربة.

وبالتالي $\sum\frac{1}{n(n-2)}$ متقاربة

ومنه:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n-2)}$$

متقاربة بإطلاق عند $x = 1$.

- عندما $x = -1$ يتم الحصول على المتسلسلة

$$\sum_{n=3}^{\infty} c_n . x^n = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n-2)} . (-1)^n = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n(n-2)} = -\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-2)}$$

وهي متقاربة وبالتالي مجال التقارب هو $[-1,1]$

مثال:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n(5^n+1)}$$

مركزها $a = -2$

بفرض $y = x + 2$ تأخذ هذه المتسلسلة الشكل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n(5^n+1)} \quad \dots \quad (*)$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(5^n+1)} . \frac{(n+1)(5^{n+1}+1)}{1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} . \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}+1}{5^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} . \lim_{n\to\infty} \frac{5^n\left(5+\frac{1}{5^n}\right)}{5^n\left(1+\frac{1}{5^n}\right)}$$

$$= 1 \times 5 = 5$$

فمجال التقارب للمتسلسلة $I =]-5,5[$

➢ولكن عندما $y = 5$ يتم الحصول من المتسلسلة (*) على المتسلسلة المتباعدة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n(5^n+1)}$$

ذلك لأنه لو طبقنا معيار نهاية النسبة كما يلي :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5^n}{n(5^n+1)}}{\frac{1}{n}} = 1$$

فهي متباعدة

➢وعندما $y=-5$ يتم الحصول من المتسلسلة (*) على المتسلسلة المتقاربة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,5^n}{n(5^n+1)}$$ حسب لايبتنز

إذاً فمنطقة تقارب المتسلسلة (*) هي $[-5,5[$ وهذا يعني أن المتسلسلة(*) لا تتقارب إلا من أجل جميع قيم y التي تحقق الشرط:

$-5\le y<5$ ومنه فالمتسلسلة الأصلية لا تتقارب إلا من اجل قيم x التي تحقق الشرط:

$$-5<x+2<5$$

أي

$$-5-2\le x<5-2$$

$$-7\le x<3$$

ومنه فمنطقة تقارب المتسلسلة الأصلية هي $[-7,3[$

أو لإيجاد منطقة التقارب:

بعد إيجاد نصف قطر التقارب ρ نقول:

مجال التقارب هو:

$$-5<y<5$$

$$-5<x+2<5$$

$$-7<x<3$$

ومنه مجال التقارب هو $]-7,3[$

من أجل $x=3$ نحصل على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n(5^n+1)}$

متباعدة حسب نهاية النسبة

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5^n}{n(5^n+1)}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{5^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{5^n\left(1+\frac{1}{5^n}\right)}=1$$

المتسلسلتين من نوع واحد

$\sum \frac{1}{n}$ متباعدة $\Longleftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n(5^n+1)}$ متباعدة.

من أجل $x=-7$ نحصل على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 5^n}{n(5^n+1)}$

متقاربة حسب لايبتنز ومتسلسلة القيم المطلقة متباعدة وبالتالي هي متقاربة شرطياً ومنه فمجال التقارب هو $[-7,3[$

((بمعنى أنه يمكن دراسة حالات الشكل على المتسلسلة الأصلية أو المتسلسلة الناتجة عن تغيير المتحول))

$$3)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = 1$$

فمجال التقارب هو $]-1,1[$ و لندرس المتسلسلة عند طرفي المجال :

- عندما $x=1$ نحصل على المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ و هي متقاربة شرطياً حسب لايبتنز
- عندما $x=-1$ نحصل على المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-1)^n}{n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ و هي متباعدة

فمجال التقارب هو : $]-1,1]$

$$4)\ \sum_{n=1}^{\infty} (n!)\, x^n$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = 0$$

فهي متقاربة فقط عند المركز $x=0$

خواص متسلسلات القوى :

١- متسلسلة القوى تكون متقاربة باطلاق على أي مجال مغلق محتوى تماماً في مجال تقاربها $]-\rho,+\rho[$

٢- متسلسلة القوى $\sum c_n x^n$ تتقارب بانتظام على أي مجال مغلق محتوى تماماً في مجال تقاربها $]-\rho,+\rho[$

٣- مجموع متسلسلة القوى $\sum c_n x^n$ هو تابع مستمر على $]-\rho,+\rho[$ (مر معنا مثال على ذلك و هو $e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$ و هو مستمر على مجال التقارب R)

٤- إذا كان $\sum c_n x^n = \sum b_n x^n$ أياً كانت $x \in I$ فإن $c_n = b_n$ أياً كانت n

٥- يمكن مكاملة متسلسلة القوى حداً حداً على أي مجال مغلق محتوى تماماً في مجال تقاربها $]-\rho,+\rho[$

فإذا كان :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \Longrightarrow$$

$$F(x) = \int S(x)dx = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int c_n x^n \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} + c \ldots (1)$$

و لحساب الثابت c لنضع $x = 0$ ((مركز المتسلسلة))

$$F(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (0)^{n+1} + c \Longrightarrow \mathrm{F}(0) = \mathrm{c} \ldots (2)$$

و حتى لا نجد صعوبة في حساب الثابت لنلاحظ ما يلي :

بطرح(2) من (1) :

$$F(x) - F(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$$

$$[F(t)]_{t=0}^{t=x} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x c_n t^n dt$$

أي أننا لنتخلص من حساب الثابت نقوم بإجراء المكاملة من 0 إلى x.

١- يمكننا اشتقاق حدود المتسلسلة حداً حداً على أي مجال مغلق محتوى تماماً في مجال تقاربها $]-\rho,+\rho[$

٢-

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = c_1 x^1 + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right)' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right)'' = 2c_2 + 3.2c_3 x + \cdots . = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

……………………………

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right)^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) c_n x^{n-k}$$

و هي صيغة المشتق من المرتبة k لأي متسلسلة قوى .

تمارين :

أوجد كل من المجاميع التالية :

-١

$$S(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots . (n+1)x^n + \cdots$$

الحل : نعلم أن :

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots x^n + x^{n+1} + \cdots = \frac{1}{1-x} \forall |x| < 1$$

باشتقاق الطرفين :

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots . (n+1)x^n + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow S(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

-٢

$$x + \frac{x^2}{2.2} + \frac{x^3}{3.4} + \frac{x^4}{4.8} + \cdots = S(x)$$

لننطلق من هذا المجموع للوصول إلى الناتج :

$$S'(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1}{1 - \left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2}{2 - x}$$

نكامل الطرفين :

$$S(x) = \int_0^x \frac{2}{2-t} dt = -2[\ln|2-t|]_0^x = -2\ln|2-x| + 2ln2$$

"انتهت المحاضرة"

نذير تيناوي

Let's improve our mathematics