جبر خطي ١

الدكتورة: شغف زوربا

المحاضرة : السادسة

التاريخ : ٣٠/١٠/٢٠١٦

إعداد : منى + فاطمة

المحاضرة السادسة ٢٠١٦/١٠/٣٠

$$\det : M_n(F) \longrightarrow F$$

١- إذا كان $n=1$ أي $A=(a_{11})$ فإن

$$\det(A) = a_{11}$$

٢- إذا كانت $n>1$ فإن ...

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + \dots + (-1)^n a_{1n}\det(A_{1n})$$

تعريف:) يمكن نشر المحدد $\det(A)$ وفق السطر الأول)

ملاحظات ...

١) نرمز أيضاً للمحدد المربعة $\det(A)$ بالرمز $|A|$ أي

$$|A| = \det(A)$$

٢) قيمة المحدد لا تتغير إذا نشرناه وفق أي سطر من أسطر أو عامود من الأعمدة.

لتكن $A=(a_{ij})$ مصفوفة مربعة من $M_n(F)$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

حيث $i=1,2,\dots,n$

النشر وفق السطر (i)

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

$j=1,2,\dots,n$

النشر وفق العامود (j)

تطبيق ...

إذا كانت A مصفوفة مربعة .. أوجد محددها

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ x & z \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \det(A) = xz - xy = x(z-y)$$

لتكن B مصفوفة $\Longleftarrow \det(B)$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \det(B) = 4\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 4(3.0-1) - 2(0-1) + 0$$

$$= -4 + 2 = -2$$

النشر وفق السطر الأول

الآن .. النشر وفق العمود الأخير

$$\det(B) = 0\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1.(-4+2)$$

$$\Longrightarrow \det(B) = -2$$

①

⇐ قيمة المحدد الثابت بغض النظر عن السطر أو العمود المستخدم بالنشر لإيجاد المحدد «det»

خواص المحددات ...

1- إذا بادلنا بين سطرين (عمودين) تتغير إشارة المحدد

$A \sim B$ حيث $A, B \in M_n(F)$ نكتب $A \sim B$

$$R_i \longleftrightarrow R_j$$

فإنه:

$$\det(A) = -\det B$$

2- إذا ضربنا عناصر سطر أو عمود بعدد $\lambda \neq 0 \in F$ فإنه قيمة المحدد تضرب أيضاً "$\lambda \neq 0$"

$A \sim B$ فإنه:

$$\det(\ ) = \lambda \cdot \det(A)$$

مثال ...

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \alpha^2 & 2\alpha \\ -\alpha & 1 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha^2 & -2\alpha \\ -\alpha & +1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \alpha \begin{vmatrix} \alpha & -2\alpha \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

نستخرج α من العمود ....

ايضاً نستخرج α من السطر ...

$$= \alpha \cdot \alpha \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\alpha^2(1-2) = \alpha^2$$

3- إذا تناسب أو تساوى سطران فإن قيمة المحدد تساوي الصفر ...

«الإثبات وظيفتك»

4- إن قيمة المحدد مصفوفة مثلثية بنوعيها (عليا، دنيا) يساوي جداء عناصر القطر الرئيسي

مثال

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

فإن

$$\det(A) = (1 \times 0 \times 1) = 0$$

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ -2\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -4\lambda & -1 & \lambda & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

هي مثلثية دنيا

$$\det(B) = \lambda^2$$

5) إذا كان في المحدد سطر صفري أو عمود صفري

⇐ قيمة الأعداد تساوي الصفر

(2)

6- إذا أجرينا تحويلاً بالشكل

$$R_i \longrightarrow R_i + \lambda R_j$$

فإن قيمة المحدد لا تتغير..

مثال...

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

بإجراء التحويل

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = B$$

$$\det(B) = 1 \times 0 \times 7 = 0$$

تعريف...

لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة معرفة على الحقل F ومن المرتبة $(m \times n)$:

$$A \in M_{m \times n}(F)$$

فإننا نعرّف المصفوفة ونرمز له A^T هو مصفوفة سطورها هي أعمدة A وأعمدتها هي أسطر A

$$A^T = (a_{ij})$$

مثال

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_1 \in M_{2 \times 3}(R)$$

$$\Longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad A^T \in M_{3 \times 2}(R)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow A_2^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ملاحظة...

إذا كانت A مصفوفة متناظرة فإن

$A^T = A$

$$\Longrightarrow \det(A^T) = \det(A)$$

تطبيق... ومثال محلول 2.2.5 ص 43

لتكن n عدداً صحيحاً موجباً ولتكن

$x_1, x_2, \ldots, x_n \in F$

عناصر من الحقل F فاحسب قيمة المحدد التالي:

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

العمليات الجبرية على المصفوفات...

أولاً.. جمع مصفوفات

لتكن $A = (a_{ij})$

$B = (b_{ij})$

مصفوفتان من $M_{m \times n}(F)$ معرفتان على الحقل F ومن المرتبة $m \times n$

3

عندئذ نجمع المصفوفتين B, A هو المصفوفة

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})$$

مثال

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow A+B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ 3 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

حيث

$$A, B, A+B\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

مثال

$$B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\\ -1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix} \quad A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

لا يمكن الجمع لأن B, A ليستا من نفس المرتبة

خواص جمع المصفوفات

1) جمع المصفوفات عملية داخلية (قانون تشكيل داخلي)

لأن $A+B\in M_{m\times n}(F)$ $\left.\begin{array}{l}A\in M_{m\times n}(F)\\ B\in M_{m\times n}(F)\end{array}\right\}$

2) جمع مصفوفتين تبديلي

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})$$
$$=(b_{ij}+a_{ij})=B+A$$

لأن الجمع تبديلي في (F)

3) جمع مصفوفتين تجميعي أي إذا كانت $A, B\in M_{m\times n}(F)$

فإن

$$(A+B)+C=(A+B+C)$$

لأن الجمع في F تجميعي

4) جمع المصفوفات في $M_{m\times n}(F)$ يقبل العنصر الحيادي وهو المصفوفة الصفرية $M_{m\times n}(F)$

5) لكل عنصر $A\in M_{m\times n}(F)$ نظير وهو ....

$$-A=-a_{ij}$$

نلاحظ أن المجموعة $M_{m\times n}(F)$ مزودة بعملية جمع المصفوفات تشكل زمرة تبديلية

$(M_{m\times n}(F),+)$ هي زمرة تبديلية

ثانياً: علاقة ضرب مصفوفة بعدد

لتكن $A\in M_{m\times n}(F)$ مصفوفة معرفة على الحقل F ذات المرتبة $(m\times n)$ وكان $\lambda\neq 0$ عنصر من الحقل F

$(\lambda\neq 0\in F)$

فإن

$$\lambda\cdot A=(\lambda a_{ij})$$