Syria Math

البنى الجبرية 1

الدكتور : حمزة الحاكمي

المحاضرة : الثالثة عشرة

التاريخ : ٢٠١٦/١١/٧

إعداد : أحمد أبو التوت

Web: www.syriamath.net group: Improve our mathematics

الزمر الجزئية الناظمية

تعريف :

لتكن G زمرة و H زمرة جزئية في G نقول عن الزمرة الجزئية أنها ناظمية في G إذا كانت :

$$\forall a \in G \quad ; \quad aH = Ha$$

ينتج مباشرة من التعريف :

١) لأجل أية زمرة G فإن كلا من G و $< e >$ زمرة جزئية ناظمية في G .
٢) كل زمرة جزئية من زمرة تبديلية تكون ناظمية .

تمهيدية :

لتكن G زمرة و H زمرة جزئية في G فإن الشروط الاتية متكافئة :

١) الزمرة الجزئية H ناظمية في G .
٢) $a\,H\,a^{-1} \subseteq H \quad ; \quad \forall a \in G$
٣) $a^{-1}H\,a \subseteq H \quad ; \quad \forall a \in G$

الاثبات :

$((1 \leftarrow 2))$ لنفرض أن الزمرة الجزئية H ناظمية في G عندئذ فحسب التعريف فإن :

$$\forall a \in G \quad ; \quad a.H = H.a$$

$$\forall a \in G \quad ; \quad a\,H\,a^{-1} = Ha\,a^{-1} = H \subseteq H$$

$((2 \leftarrow 3))$ لنفرض أن $a\,H\,a^{-1} \subseteq H \quad ; \quad \forall a \in G$

ولما كان $a^{-1} \in G$ فإن $a^{-1}\,H.(a^{-1})^{-1} \subseteq H$

فإن $a^{-1}\,H.a \subseteq H$

$((3 \leftarrow 1))$ لنفرض أن $a^{-1}\,H\,a \subseteq H \quad ; \quad \forall a \in G$

لإثبات أن H زمرة جزئية ناظمية في G يجب إثبات أن :

$$\forall a \in G \quad ; \quad a.H = H.a$$

ليكن $x \in aH$ عندئذ يوجد $h \in H$ فإن $x = ah$

$$x = a.h.\underbrace{a^{-1}.a}_{\text{محايد}} \quad (\text{ضربنا } a.h \text{ بالمحايد})$$

$$= (a.h.a^{-1}).a = \underbrace{((a^{-1})^{-1}.h.a^{-1})}_{\epsilon H(3\text{حسب})}.a \,\epsilon\, Ha$$

$$\Longrightarrow aH \subseteq Ha$$

والان لنثبت الاحتواء المعاكس :

ليكن $y \in Ha$ عندئذ $y = h_1 a$ حيث $h_1 \in H$ ومنه :

$$y = h_1 a = \underbrace{a.a^{-1}}_{\text{محايد}}.h_1.a = a.(a^{-1}.h_1.a)\epsilon\, aH$$

$$\Longrightarrow Ha \subseteq aH$$

ومن الاحتواءين نجد أن $Ha = aH$ ومنه الزمرة الجزئية ناظمية في G

مبرهنة :

لتكن G زمرة فإن القضايا التالية صحيحة :

١) تقاطع أي أسرة من الزمرة الجزئية الناظمية في G هو زمرة جزئية ناظمية في G .
٢) الزمرة الجزئية $Z(G)$ ناظمية في G
٣) لتكن H,k زمرة جزئية في G بحيث $H \subseteq k$ إذا كانت H ناظمية في G عندئذ H تكون ناظمية في K .
٤) لتكن H زمرة جزئية في G لأجلها $(G:H) = 2$ عندئذ تكون الزمرة الجزئية H ناظمية في G .

الاثبات :

١) لتكن K_i حيث $i \in I$ ((حيث I مجموعة ما و قابلة للعد)) أسرة من الزمر الجزئية الناظمية في G وجدنا سابقا ان $\cap_{i\epsilon I} K_i$ زمرة جزئية في G

وليكن $a \,\epsilon\, G$ ولنبرهن أن $a(\cap_{i\epsilon I} K_i)\, a^{-1} \subseteq \cap_{i\epsilon I} K_i$ (طبقنا الشرط الثاني بالتمهيدية السابقة)

ليكن $x \,\epsilon\, a \cap_{i\epsilon I} K_i\, a^{-1}$ عندئذ يوجد $y \,\epsilon \cap_{i\epsilon I} K_i$ بحيث $x = aya^{-1}$ ومنه $\forall\, i \,\epsilon\, I$ فإن $y \,\epsilon K_i$

ولما كانت الزمرة الجزئية K_i ناظمية في G فإن

$$x = aya^{-1} \;\in aK_i a^{-1} \subseteq K_i$$

ومنه فإن $x \in\cap_{i\epsilon I} K_i$ وبالتالي فإن الزمرة الجزئية $\cap_{i\epsilon I} K_i$ ناظمية في G.

٢) قبل إثبات أن $Z(G)$ ناظمية في G علينا بداية أن نثبت أن $Z(G)$ زمرة جزئية في G

$Z(G)$ تشكل زمرة جزئية تبديلية وتسمى تدعى بمركز الزمرة G و تعرف كما يلي :

$$Z(G) = \{a : a \epsilon G \quad ; \quad xa = ax \quad \forall x \epsilon G\}$$

ليكن $a \epsilon G$ ولنبرهن على أن $a\, Z(G)a^{-1} \subseteq Z(G)$

ليكن $x \epsilon a\, Z(G)a^{-1}$ عندئذ

$$x = a.\mathrm{k}.a^{-1} \quad : \quad k \epsilon Z(G)$$

$$x = a.k.a^{-1} = \overbrace{\mathrm{k}.a.a^{-1}}^{\text{فإنه حسب تعريف} Z(G)} = k\epsilon Z(G)$$

ومنه $Z(G)$ ناظمية في G .

٣) لتكن K, H زمر جزئية في G بحيث $H \subseteq K$ ولنفرض أن H ناظمية في G عندئذ

$$\forall a \epsilon G \quad ; \quad a\, H\, a^{-1} \subseteq K$$

ولما كان كل $k \in K$ هو عنصر في G نجد

$$\forall k \epsilon K \quad ; \quad k\, H\, k^{-1} \subseteq H$$

وبالتالي H ناظمية في K . ((لكون أن كل $k \epsilon K$ فإن $k \epsilon G$))

٤) لتكن H زمرة جزئية في G أن $(G:H) = 2$ أي أن الدليل "2" يدل على عدد المرافقات وبالتالي يوجد مرافقتين للزمرة H فقط هما H و aH مولدة بعنصر مختلف عن المحايد أي أن $a \epsilon G\, , a \neq e$ أي :

$\{eH, aH\}$ المرافقتين اليساريتين الوحيدتين في G

نميز حالتين :

١) اذا كان $a \in H$ عندئذ $aH = H = Ha$ ومنه فهي ناظمية .

٢) اذا كان $a \notin H$ عندئذ

$$aH = G \backslash H = Ha$$

((لأن H, aH تشكلان تجزئة لـ G)) ومنه فهي ناظمية.

إن جداء أي زمرتين ليس بالضرورة أن يكون زمرة جزئية فالمبرهنة التالية تعطينا الشرط الازم والكافي كي يكون جداء زمرتين جزئيتين هو زمرة جزئية .

ملاحظة قبل البدء بالمبرهنة :

a) إذا كان جداء مجموعتين مثل A, B تبديلي فهذا لا يعني أن جداء العناصر تبديلي أي أنه إذا كان $A.B = B.A = \{a.b : a \epsilon A\, , b \epsilon B\}$ عندئذٍ:

$\begin{cases} a \epsilon A \\ b \epsilon B \end{cases}$ فإن $a.b \mp b.a$ ((أي أنه قد تتحقق المساواة و قد لا تتحقق ...))

b) أما إذا كان جداء العناصر تبديلي $\Leftarrow$ جداء المجموعات تبديلي .

مبرهنة :

لتكن G زمرة و A,B زمر جزئية في G فإن الشروط الاتية متكافئة :

١) الجداء $A.B$ هو زمرة جزئية في G .

٢) $A.B = < A \cup B >$

٣) $A.B = B.A$ ((التبديلية لجداء المجموعات و ليس لجداء العناصر كم ذكرنا قبل قليل))

الاثبات:

((1 ← 2)) لنفرض أن الجداء $A.B$ زمرة جزئية في G عندئذ :

ليكن $x \in A.B$ حيث $x = a.b$ حيث $a \in A$, $b \in B$

$$a \in A \subseteq A \cup B \subseteq < A \cup B >$$

$$b \in B \subseteq A \cup B \subseteq < A \cup B >$$

وبالتالي $x = a.b \in A \cup B$ ومنه $A.B \subseteq < A \cup B >$

لنثبت الاحتواء المعاكس

حسب تعريف جداء المجموعات $\forall a \in A ; a = a.\overset{\in B}{\tilde{e}} \in A.B$

حسب تعريف جداء المجموعات $\forall a \in A ; b = b.\overset{\in A}{\tilde{e}} \in A.B$

أي أن $A \subseteq A.B$, $B \subseteq A.B$ وبالتالي $A \cup B \subseteq A.B$

والزمرة المولدة بالاجتماع أصغر زمرة تحوي $A \cup B$ أي :

$$A \cup B \subseteq < A \cup B >$$

ومنه فإن $< A \cup B > \subseteq A.B$.

ومن الاحتواءين نجد: $A.B = < A \cup B >$

((2 ⟵ 3)) لنفرض أن $A.B = < A \cup B >$

ماذا يعني أن $A.B = < A \cup B >$ ؟ هذا يبين أن $A.B$ زمرة ولكن $B.A$ ليست بالضرورة زمرة .كوننا لم نثبت ذلك بعد و لذا سنعاملها معاملة أي مجموعة ريثما نثبت أنها زمرة))

لنبرهن أن $A.B = B.A$ ((عندها نكون أثبتنا أنها زمرة))

ليكن $x \in A.B$ عندئذ وكون $A.B$ زمرة جزئية فإن $x^{-1} \in A.B$ وحسب تعريف الجداء فإن:

$$\exists\, a \in A\ , b \in B \quad : \quad x^{-1} = a.b$$

$$x = (x^{-1})^{-1} = (a.b)^{-1} = b^{-1}.a^{-1} \in B.A$$

حيث $a^{-1} \in A$ و $b^{-1} \in B$ ومنه $A.B \subseteq B.A$

الاحتواء المعاكس :

$y \in B.A$ عندئذ $y = b_1.a_1$ حيث $a_1 \in A$, $b_1 \in B$ ومنه

$$a_1 \in A \subseteq A \cup B \subseteq < A \cup B >= A.B$$

$$b_1 \in B \subseteq A \cup B \subseteq < A \cup B >= A.B$$

ومنه فإن $y = b_1.a_1 \in A.B$ وبالتالي $B.A \subseteq A.B$

ومن الاحتواءين نجد : $A.B = B.A$.

((3 ← 1)) لنفرض ان $A.B = B.A$ ونبرهن أن $A.B$ زمرة جزئية في G

بما أن A, B ليستا خاليتين فالجداء ليس خالي $e = \overset{\in A}{e}.\overset{\in B}{e} \in A.B$

ليكن $x, y \in A.B$ عندئذ :

$$x = a_1.b_1$$

$$y = a_2.b_2$$

حيث : $a_1 , a_2 \in A$ و $b_1, b_2 \in B$

ومنه فإن $x.y^{-1} = a_1.b_1\,(a_2.b_2)^{-1} = a_1.\underbrace{(b_1.{b_2}^{-1}{a_2}^{-1})}_{\in B}\in B.A$

لدينا $b_1.{b_2}^{-1}.{a_2}^{-1} \in B.A = A.B$ ومنه $b_1.{b_2}^{-1}.{a_2}^{-1} = a_3.b_3$ حيث $a_3 \in A$ و $b_3 \in B$

وبالتالي

$$x.y^{-1} = a_1.a_3.b_3 \in A.B$$

أي أن $x.y^{-1} \in A.B$ ومنه $A.B$ زمرة جزئية في G .

ملاحظة حول المبرهنة السابقة :

((إن هذه الشروط السابقة تكون شروط متكافئة عندما يكون الجداء زمرة وليست شروط متكافئة كي يكون الجداء زمرة))

سنورد الان من خلال المبرهنة التالية شرط اخر كي يكون جداء الزمرتين الجزئيتين هو زمرة جزئية .

مبرهنة :

لتكن G زمرة و A,B زمر جزئية في G إذا كانت B ناظمية في G عندئذ :

١) $A.B$ زمرة جزئية في G
٢) $A.B =< A \cup B >$
٣) $A.B = B.A$

الاثبات: ١) واضح أن $\emptyset \neq A.B \subseteq G$ وليكن $x,y \in A.B$ عندئذ وحسب تعريف جداء المجموعات فإن :

$$x = a.b \quad ; \quad a,a_1 \in A$$
$$y = a_1.b_1 \quad ; \quad b,b_1 \in A$$

ومنه

$$x.y^{-1} = a.b(a_1.b_1)^{-1} = a.b.b_1^{-1}.a_1^{-1}$$
$$= a.b.\underbrace{a_1^{-1}.a_1}_{\text{المحايد}}.b_1^{-1}.a_1^{-1}$$

بما أن الزمرة الجزئية B ناظمية في G فإن $a_1.b_1^{-1}.a_1^{-1} \in a_1.B.a_1^{-1} \subseteq B$

لنفرض أن $a_1.b_1^{-1}.a_1^{-1} = b_0 \in B$ ولنعوض

$$x.y^{-1} = a.b.a_1^{-1}.b_0 = a.\underbrace{a_1^{-1}.a_1}_{\text{المحايد}}.b.a_1^{-1}.b_0$$

بما أن الزمرة الجزئية B ناظمية في G فإن $a_1.b.a_1^{-1} \in a_1.B.a_1^{-1} \subseteq B$

لنفرض أن $a_1.b.a_1^{-1} = b' \in B$ ولنعوض

$$x.y^{-1} = \underbrace{a.a_1^{-1}}_{\in A}.\underbrace{b'.b_0}_{\in B} \in A.B$$

ومنه $A.B$ زمرة زمرة جزئية في G .

٢و٣ ينتج مباشرة من المبرهنة السابقة واعتمادا على (١) .

" انتهت المحاضرة "