التحليل العددي1

الدكتورة: رشا بعاج

المحاضرة : السابعة

التاريخ : ٢٦/١٠/٢٠١٦

إعداد : محمد فليون && عبد الرحمن البحش

مرحبا اصدقائي

نتابع بحل المعادلات غير الخطية والطرق المجالية بعد ان تحدثنا عن طريقة تنصيف المجال وطريقة الوضع الخاطئ وطريقة نيوتن وطريقة القاطع سنكمل مع طريقة **النقطة الثابتة**

طريقة النقطة الثابتة(التّكراريّة)

تختلف هذه الطريقة عن طريقة القاطع بأنها تبدأ من صيغة الدالة $f(x)$

للحصول على الشكل $x = g(x)$ ثم نستخدم هذه الصيغة للحصول علة دالة التكرار $x_{n+1} = g(x_n)$

يوجد عدد كبير من النّظريات والمبرهنات التي درست الطّريقة والتي درست التّقارب فيها

مبرهنة

نفرض أن $g(x)$ و $g'(x)$ دالتان مستمرتان ومعرفتان على المجال [a,b] بحيث تحقق الدالة $g(x)$ العلاقة :

$$\alpha - X_{n+1} = \frac{-1/2\ (\alpha - X_n\ )(\alpha - X\_(n-1)\ ) * g"(\xi)}{g(\xi)}$$

$$\min\{\alpha, X_n, X_{n-1}\} \leq \xi$$

$$\xi \leq \max\{\alpha, X_n, X_{n-1}\}$$

هذا المقدار محصورين بين أكبر عدد وأصغر عدد.

بفرض $\lambda\ = \max|g'(x)| < 1$ حيث $a \leq x \leq b$

حيث α هو الجذر الفعلي للدالة

عندئذ يوجد حل وحيد α للمعادلة $g(x) = x$ على المجال [a,b] تتقارب القيم التكرارية x_n من الجذر α أياً كانت القيمة الابتدائية الابتدائية x_0

مثال: أوجد قيمة تقريبيّة للعدد $x = \sqrt{5}$

نستنتج $x^2 - 5 = 0$ أي

$f(x) = 0 \quad \Leftarrow \quad x = g(x)$

نفرض أربع طرائق تكرارية لحل هذه المعادلة:

$I_1: \quad x_{n+1} = 5 + x_n - x_n^2$ ضربنا بـ(-١) ونضيف على (x_n) للطرفين

$I_2: \quad x_{n+1} = \frac{5}{x_n}$ نقسم على (x_n)

$I_3: \quad x_{n+1} = 1 + x_n - \frac{1}{5}x_n^2$ نضرب الطرفين بـ$(-\frac{1}{5})$ ونضيف (x_n)

$I_4: \; x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{5}{x_{n-1}}\right)$ نضيف (x_n^2) للطرفين وبعدها نقسم على (x_n) وامثالها

ملاحظة استعملنا (x_n) للحالة العامة وإلا إذا وضعنا (x) ليس خطأ

بدأنا ب $x_0 = 2.5$ لأنها قريبة من الجذر على المجال [2,3]

n	$x_n : I_1$	$x_n : I_2$	$x_n : I_3$	$x_n : I_4$
0	2.5	2.5	2.5	2.5
1	1.25	2	2.25	2.25
2	4.6875	2.5	2.2375	2.2361111
3	−12.285156	2	2.236288	2.236068

حيث أنّ عند التكرار $n = 0$ قمنا بفرض القيمة 2.5 وعوّضنا في I_1 وَ I_2 وَ I_3 وَ I_4

ونتج عندنا السطر الذي يليه وكذلك القيم الجديدة وعوّضناها في I_1 وَ I_2 وَ I_3 وَ I_4 وهكذا ...

ملاحظات:

- ليست كلّ دالة يمكن أن نحصل عليها من الشّكل $x = g(x)$ ستعطي نتائج لذلك ممكن أن نحصل على دالة g بطريقة تؤدي إلى نتائج متباعدة وبالتالي أنّ الدالة المستخدمة هي دالة فاشلة لا تعطي الحلّ المطلوب
- هذه الطّريقة تعتمد عليها الكثير من الأبحاث

شرط تقارب طريقة النقطة الثابتة:

إذا كان

$$\lambda = \max|g'(x)| < 1$$

فإن القيمة التكرارية x_n تتقارب خطياً من الجذر الفعلي α آيا كانت x_0 تنتمي [a,b]

إذا كان $|g'(x)| < 1$ عندها لا تتقارب الطريقة التكرارية وعند $|g'(x)| = 1$

لا يمكن الجزم بأنها تتقارب.

تعريف : نقول ان المتتالية $\{X_n\}_{n\geq 0}$ متقاربة من α بمرتبة تقارب $p \geq 1$ إذا تحقق الشرط : $|\alpha - X_n| \leq c|\alpha - X_n|^p$ وذلك من اجل $c \geq 0$

حيث P مرتبة التقارب و c ثابت التقارب

إذا كان $p = 1$ ندعو التقارب خطي

$p = 2$ ندعو التقارب تربيعي

$p = 3$ ندعو التقارب تكعيبي

...

مقارنة بين الطّرق المجاليّة الخمس

الطّريقة	مرتبة التّقارب (p)	ثابت التّقارب(c)	ملاحظات تخصّ الطّريقة
تنصيف المجال	1	—	$E_n = \frac{b-a}{2^n}$
الوضع الخاطئ	تسمّى مرتبة التّقارب فوق الخطيّة $p > 1$	—	—
القاطع	$p = 1.62$	$\left[\frac{f''(x)}{2f'(x)}\right]^{p-1}$ حيث (x) هي قيمة الجذر التّقريبي	$E_{n+1} = \frac{1}{2}(E_n)(E_{n-1})\left(\frac{f''}{f'}\right)$
نيوتن	2	$\frac{f''}{2f'}$	—
النّقطة الثابتة	1	$\max\|g'(x)\|$ حيث (x) هي قيمة الجذر التقريبي	$E_n = \left(\frac{\lambda^n}{1-\lambda}\right)E_0$ حيث $E_0 = \|x_1 - x_0\|$ λ التي في المقام هي $\max\|g'(x)\|$

ملاحظات حول الجدول:

- كلّما كانت مرتبة التّقارب أكبر كلّما كانت الطّريقة أسرع إذاً تعدّ نيوتن أسرع الطّرق لأن مرتبة تقاربها تساوي 2 ويليها طريقة القاطع وبعدها طريقة الوضع الخاطئ علماً أنّه في طريقة الوضع الخاطئ $2 > p > 1$ أي هي أكبر من الواحد لكن لا تساوي 2 باختصار مرتبة تقاربها فوق الخطية، وتعدّ طريقتا النّقطة الثابتة وتنصيف المجال متساويتان بالسرعة لأن مرتبة تقاربهما تساوي الواحد
- يمكن المقارنة بين سرعة التقارب للطرق عندما تكون جميع الطرق متقاربة لكن إذا كانت إحدى الطرق غير متقاربة فلا يمكن مقارنتها بالطرق الاخرى .

مثال شامل عن كل شيء تتضمّنه طريقة النّقطة الثابتة:

لتكن لدينا الدّالّة $g(x) = \sqrt{3x+4}$ والمطلوب:

١) أثبت أنّ $x = 4$ نقطة ثابتة للدّالّة السّابقة
٢) هل تمثّل $g(x)$ دالّة تكرار على المجال $[2,5]$
٣) ما هي مرتبة التّقارب
٤) ما هو ثابت التّقارب
٥) أوجد x_1, x_2 من أجل $x_0 = 3$
٦) احسب الخطأ المرتكب في حساب x_{24}

الحل: ١) إذا تحقق أنّ $x = g(x)$ من أجل $x = 4$ فتكون $x = 4$ نقطة ثابتة بالنّسبة للدّالة

نعوض: $4 = \sqrt{3(4)+4}$

$4 = \sqrt{16} \Leftarrow x = 4$ نقطة ثابتة للدّالة $g(x)$

إذاً النَقطة $(4,4)$ تنتمي لمنحني الدّالة

٢) إنّ المشتق $g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$ سندرس إشارته والجذر دائماً أكبر أو يساوي الصفّر

$\Leftarrow$ المقام متزايد وكلّما كبر المقام تناقصت الدّالة

$g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$ الدّالة متناقصة على المجال $[2,5]$ بما أن الدالة متناقصة نعوّض بالقيمة 2 وأمّا إذا كانت متزايدة نعوّض بالقيمة 5 وهنا الدالة متناقصة $g'(2) = \frac{3}{2\sqrt{10}} < 1$

إذاً الدّالّة g هي دالّة تكرار

٣) مرتبة التّقارب $p = 1$

٤) ثابت التّقارب $c = g'_{max}$

$$c = \frac{3}{2\sqrt{10}}$$

٥) $x_0 = 3$

$$x_n = \sqrt{3(x_n - 1) + 4}$$

$$x_1 = g(x_0)$$

$$= \sqrt{3(3) + 4} = \sqrt{13} = 3{,}60555$$

$$x_2 = g(x_1)$$

$$= \sqrt{3(3{,}60555) + 4}$$

$$= 3{,}8492$$

٦) لحساب الخطأ المرتكب في طريقة النّقطة الثّابتة نطّبق

$$E_n = \left(\frac{\lambda^n}{1-\lambda}\right) E_0$$

حيث λ التي في المقام هي $\max|g'(x_2)|$

$$E_0 = |x_1 - x_0| = 3{,}60555 - 3 = 0{,}60555$$

$$|g'(x_2)| = \left|\sqrt{3(3{,}8492) + 4}\right|$$

$$E_{24} = \frac{\left(\frac{3}{2\sqrt{10}}\right)^{24}}{1 - \left(\frac{3}{2\sqrt{10}}\right)} = 0{,}60555$$

حل الوظائف

التمرين الأول

لتكن الدّالة $f(x) = e^x - 2$ ومن أجل $x_0 = 0.5$ والمطلوب:

١) أوجد x_3, x_2, x_1 بطريقة نيوتن؟ أي الجذر التّقريبي المطلوب هو x_3 وقد علمنا هذا من نص السّؤال

٢) من هو الجذر التّقريبي الذي حصلنا عليه؟ هو x_3

٣) ما هي مرتبة التّقارب؟ $p = 2$

٤) ما هو ثابت التّقارب؟ $c = \frac{f''}{2f'}$ حيث $f' = f'' = e^x$

٥) ما هو الخطأ المرتكب في الجذر x_3 ؟

الحل:

١) نطبق قانون نيوتن : $x_{(n+1)} = x_n - \left[\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right]$

لكن علينا أولا إيجاد $f(x) = e^x - 2$ و $f'(x) = e^x$

$$x_1 = x_0 - \left[\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right] = 0.5 - \left[\frac{e^{0.5} - 2}{e^{0.5}}\right] = 0.713063194$$

نعيد التعويض في القانون من أجل x_2, x_3 فنحصل على

$$x_1 = 0.7113441573$$

$$x_3 = 0.6933117458$$

إذا الجذر التربيعي هو x_3 .

٢) مرتبة التقارب $p = 2$ (من الجدول)

٣) ثابت التقارب $c = \frac{f''}{2f'}$ (من الجدول)

$$c = \frac{e^x}{2e^x} = \frac{e^{0.5}}{2e^{0.5}} = 0.5$$

٤) $|x_n - x_{n-1}| = |0.6933117458 - 0.01803241155|$

$$= 0.0180324115$$

التمرين الثاني

لتكن الدّالة $f(x) = x - \cos(x)$ استخدم طريقة نيوتن لإيجاد الجذر التّقريبي بدقّة $\varepsilon = 10^{-4}$ على المجال $[0, \frac{\pi}{2}]$ من أجل $x_0 = 0.5$

١) ماهي مرتبة التّقارب
٢) ما هو ثابت التّقارب
٣) أوجد الخطأ الأعظمي المرتكب في حساب الجذر المطلوب

الحل:

١) $p = 2$

٢) $c = \frac{f'}{2f''}$ لدينا الدالة $f(x) = x - \cos(x)$

نشتق الدالة $f(x)$ $\quad f'(x) = 1 + \sin(x)$

$$f''(x) = \cos(x)$$

الآن نعوض بقانون (c)

$$c = 1 + \frac{\sin(0.5)}{\cos(0.5)} = 1.008764946$$

٣) لإيجاد الخطأ الأعظمي ننشأ الجدول التالي:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$(x_n - x_{n-1})$
0	0.5	−0.9999619231	1.008726535	
1	0.9956367715	−0.00421749805	1.017376265	0.4956367715
2	0.9997771336	−0.00007062943431	1.017448517	0.0041403621
3	0.9997077154			0.000094181984

نتوقف عند التكرار الثالث لان $|x_n - x_{n-1}| = |x_3 - x_2|$

$$= |0.9997077154 - 09997771336|$$

$$= 0.000094181984 \leq 10^{-4}$$

التمرين الثالث ((حاول أن تحل))

أعد التمرين السّابق(الثاني) من أجل طريقة الوضع الخاطئ والقاطع والنّقطة الثّابتة وتنصيف المجال وعند الحاجة استخدم $x_0 = 0$ وَ $x_1 = \frac{\pi}{2}$ من أجل الطّرق التي تحتاج إلى قيمتين ابتدائيتين.

ومن أجل النّقطة الثّابتة استخدم أسهل دالّة تكرار تنتج عنها

$$f(x) = x - \cos(x)$$

$g(x)$ هي $x = \cos(x)$

التّمرين الرابع((حاول أن تحل))

استخدم طريقة النّقطة الثّابتة لإيجاد جذر تقريبي للدّالّة

$f(x) = x^3 - \sin(x)$ علماً أنّ: $x_0 = 1$ على المجال $[0,\frac{\pi}{2}]$

ومن هذه الدّوال التي تصل للجذر التّقريبيّ بشكل أسرع أو قارب بين الدوال من حيث سرعة التقارب

$1)\ x = \frac{\sin(x)}{x^2}$,$2)\ x = \sqrt[3]{\sin(x)}$,$3)\ x = x + \sin(x) - x^3$

"انتهت المحاضرة"