نظرية
الاحتمالات

محاضرة [11]   / /

الأشعة العشوائية الثنائية المتقطعة (المنفصلة)

تعريف: نقول عن شعاع عشوائي (X, Y) متقطع (منفصل)
اذا كانت مجموعة قيمه مجموعة منتهية أو غير منتهية لكنها قابلة للعد
فإذا كانت مجموعة قيم المتغير X

$$R_X = \{x_1, \dots\dots, x_m, \dots\}$$

ومجموعة قيم المتغير Y

$$R_Y = \{y_1, \dots\dots, y_n, \dots\}$$

عندئذ تكون مجموعة قيم الشعاع (X, Y) هي

$$R_{(X,Y)} = \{(x_i, y_j) : i=1,2,\dots,m,\dots \quad j=1,2,\dots,n,\dots\}$$

ونقول عن الحدث $[X,Y = (x_i, y_j)]$ أنه وقع إذا وقع الحدثان $[X = x_i]$ و $[Y = y_j]$ ونرمز لاحتمال وقوع هذا الحدث
ب: $P[X = x_i, Y = y_j]$

تعريف دالة الكثافة المشتركة:
ندعو الدالة $f(x,y)$ دالة الاحتمال أو دالة الكثافة المشتركة
للشعاع (المتجه) X, Y
أو دالة الكثافة المشتركة للمتغيرين X و Y حيث

$$f(x,y) = P[X = x, Y = y]$$

ويمكن تمثيل هذه الدالة في جدول كما يلي:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	..	y_n	.	مجموع
x_1	$f(x_1,y_1)$	$f(x_1,y_2)$				$\sum f(x_1,y_j)$
x_2	$f(x_2,y_1)$	$f(x_2,y_2)$				$\sum f(x_2,y_j)$
x_n	$f(x_n,y_1)$	$f(x_n,y_2)$				$\sum f(x_n,y_j)$
مجموع	$\sum f(x_i,y_1)$	$\sum f(x_i,y_2)$		$\sum f(x_i,y_n)$		1

/ /

إن دالة الكثافة المشتركة تحقق الشرطان:

① $f(x_i, y_j) \geq 0$

$\forall \begin{cases} i = 1, \dots, m, \dots \\ j = 1, \dots, n, \dots \end{cases}$

② $$\boxed{\sum_i \sum_j f(x_i, y_j) = 1}$$

تعريف: دالتا الكثافة الهامشيتان لـ X و Y

إذا كان (X, Y) شعاعا عشوائيا متقطعا فإننا ندعو الدالتين $f(x)$ ، $f(y)$ دالتا الكثافة الهامشيتان لـ X و Y على الترتيب

حيث $$f_X(x) := \sum_y f(x, y)$$

$$f_Y(y) := \sum_x f(x, y)$$

أي أنه من أجل $i = 1, 2, \dots, m, \dots$

$j = 1, 2, \dots, n, \dots$

فإن: $$f_X(x_i) = \sum_{j \geq 1} f(x_i, y_j)$$

$$f_Y(y_j) = \sum_{i \geq 1} f(x_i, y_j)$$

دالة التوزيع المشتركة لشعاع عشوائي متقطع

$$F_{X,Y}(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y]$$

$$= \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} f(x_i, y_j)$$

Scanned by CamScanner

مثال: نفرض (X , Y) شعاع عشوائي له جدول الاحتمال

$X \backslash Y$	y_1: 1	y_2: 2	y_3: 3	مجموع
x_1: 4	$f(4,1) = 0{,}3 = f(x_1,y_1)$	$f(x_1,y_2) = 0{,}1 = P[X=4, Y=2]$	$0{,}3$	$\sum_{j=1}^{2} f(x_1,y_j) = 0{,}7$
6	$0{,}1$	0	$0{,}2$	$\sum_{j=1}^{2} f(x_2,y_j)$
مجموع	$\sum_{i=1}^{2} f(x_i,y_1) = 0{,}4 = f_Y(y_1)$	$\sum_{i=1}^{2} f(x_i,y_2) = 0{,}1 = f_Y(y_2)$	$\sum_{i=1}^{2} f(x_i,y_3) = 0{,}5 = f_Y(y_3)$	1

$$f_X(x_1) = \sum_{j=1}^{3} f(x_1, y_j)$$

$$= f(x_1,y_1) + f(x_1,y_2) + f(x_1,y_3)$$

$$= f(4,1) + f(4,2) + f(4,3)$$

$$= 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}7$$

$$F(5 , 2{,}5)$$

$$= P[X \leq 5 , Y \leq 2{,}5]$$

$$= \sum_{x_i \leq 5} \sum_{y_j \leq 2{,}5} f(x_i , y_j)$$

$$= f(x_1,y_1) + f(x_1,y_2)$$

$$= f(4,1) + f(4,2)$$

$$= 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4$$

/ /

$$F(7, 2.5)$$

$$P(X \leq 7, \; Y \leq 2.5)$$

$$= \sum_{x_i \leq 7} \sum_{y_j \leq 2.5} f(x_i, y_j)$$

$$= f(x_1, y_1) + f(x_1, y_2)$$

$$= f(4,1) + f(4,2) + f(6,1) + f(6,2)$$

$$= 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0 \quad = 0{,}5$$

$$F(2,5) = \sum_{x_i \leq 2} \sum_{y_j \leq 5} f(x_i, y_j) \quad = P[X \leq 2, Y \leq 5]$$

$$= P(\phi) = 0$$

$$F(7,4) = \sum_{x_i \leq 7} \sum_{y_i \leq 4} f(x_i, y_j)$$

$$= P[X \leq 7, \; Y \leq 4] = P(\Omega) = 1$$

تمرين: ليكن (X, Y) متغيراً عشوائياً له الكثافة الاحتمالية المشتركة:

$$f(x,y) = \frac{x+y}{21} \; ;$$

$$x = 1, 2, 3$$
$$y = 1, 2$$

عين الكثافة الهامشية لـ X, Y

الحل

$$f_X(x) = \sum_{y} f(x,y)$$

$$= \sum_{y=1}^{y=2} \left[\frac{x+y}{21}\right]$$

ALAD3B.net

$$= \frac{x+1}{21} + \frac{x+2}{21} = \frac{2x+3}{21}$$

$x = 1, 2, 3$

$$f_Y(y) = \sum_{x} f(x,y)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=3} \left(\frac{x+y}{21}\right)$$

$$= \frac{1+y}{21} + \frac{2+y}{21} + \frac{3+y}{21}$$

$$= \frac{6+3y}{21} = \frac{2+y}{7} \quad ; \quad y = 1, 2$$

للتأكد:

$$\sum_{x} f_X(x) = \sum_{x=1}^{3} \left(\frac{2x+3}{21}\right)$$

$$= \frac{5}{21} + \frac{7}{21} + \frac{9}{21} = \frac{21}{21} = 1$$

$$\sum_{y} f_Y(y) = \sum_{y=1}^{3} \left(\frac{2+y}{7}\right)$$

$$= \frac{3}{7} + \frac{4}{7} = 1$$

تعريف: نقول عن متغيرين عشوائيين X, Y أنهما مستقلان إذا تحقق:

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

تمرين: لتكن $f(x,y)$ الكثافة المشتركة للشعاع (X,Y) والمعرفة بالشكل:

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{30} \quad ; \quad x = 1, 2, 3$$
$$y = 1, 2$$

عين الكثافات الهامشية لـ X و Y، هل هما مستقلان أم لا؟

الحل:

$$f_X(x) = \sum_{y} f(x,y)$$

$$= \sum_{y=1}^{2} \frac{x y^2}{30} = \frac{x}{30} + \frac{4x}{30}$$

$$= \frac{5x}{30} = \frac{x}{6} \quad ; x = 1, 2, 3$$

$$f_Y(y) = \sum_{x} f(x,y)$$

$$= \sum_{x=1}^{2} \frac{x \cdot y^2}{30}$$

$$= \frac{y^2}{30} + \frac{2y^2}{30} + \frac{3y^2}{30} = \frac{6y^2}{5} \quad ; y = 1, 2$$

حتى يكونا مستقلان يجب أن تتحقق الشرط

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

ولذلك نلاحظ أن:

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{x}{6} \cdot \frac{y^2}{5}$$

$$= \frac{x y^2}{30} = f(x,y)$$

إذن هما مستقلان عشوائياً.

تمرين: لتكن (X, Y) شعاعاً عشوائياً كثافته معطاة بـ:

$$f(x,y) = \frac{x y^2}{13} \quad ; \quad (x,y) \in \{(1,1)\,(1,2)\,(3,2)\}$$

عين الكثافات الهامشية وهل هما مستقلان

الحل:

$$f_X(x) = \sum_{y} f(x,y)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(1)(1)^2}{13} + \dfrac{(1)(2)^2}{13} & ; x = 1 \\ = \dfrac{15}{3} & \\ f(2,2) = \dfrac{(2)(3)^2}{13} & ; x = 2 \\ = \dfrac{8}{13} & \end{cases}$$

$$f_y(y) = \sum_x f(x,y)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(1)(1)^2}{13} = \dfrac{1}{13} & ; y = 1 \\ \dfrac{(1)(2)^2}{13} + \dfrac{(2)(2)^2}{13} = \dfrac{12}{13} & ; y = 2 \end{cases}$$

نلاحظ أن المتغيرين غير مستقلين لأن :

$$\underbrace{f(x,y)}_{\frac{1}{13}} \neq f_x(x) \cdot f_y(y)$$

مثلاً :

$$f(1,1) \overset{?}{=} f_x(1) \cdot f_y(1)$$

$$= \frac{5}{13} \cdot \frac{1}{13} = \frac{5}{169}$$

$$\frac{1}{13} \neq \frac{5}{169}$$

انتهت المحاضرة الحادية عشر