المحاضرة الأولى:

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

نقول عن جملة المعادلات أنها مستقلة خطياً إذا لم تنتج إحداها من الأخرى (بعملية جبرية)

لإيجاد حل المعادلات نكتبها بشكل مصفوفات:

$$AX = B \quad , \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}.A.X = A^{-1}.B$$

$$I X = A^{-1}.B$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}.B$$

1) طريقة غاوس:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

حيث $\tilde{A}$ هي المصفوفة الناتجة عن A

$O(m,n)$ هو عبارة عن درجة التعقيد لهذه المصفوفة وتمثل عدد العمليات التي نجريها حيث: n عدد المجاهيل و m عدد المعادلات :

نستطيع كتابة طريقة غاوس على الشكل التالي:

Eq	Element (var) مصفوفة المجاهيل			مصفوفة الوحدة I			R.h ثوابت
	x_1	----	x_n	I_1	I_2	.. I_n	b_1
1	a_{11}	---	a_{1n}	1	0	0	⋮
2	a_{21}	---	a_{2n}	0	1	⋮	⋮
⋮	⋮			⋮	⋮	⋮	⋮
m	a_{m1}	---	a_{mn}	0	0	1	b_m

عدة حالات:

- $m=n$ إذا كانت جملة المعادلات مستقلة (المصفوفة المربعة)
- $m>n$ عدد المعادلات أكبر من عدد المجاهيل ، المعادلات غير مستقلة خطياً
- $m<n$ يوجد لدينا مجاهيل حرة (أي أعطيناها قيم كلما أعطي قيمة أحصل على قيم جديدة.

* استخدام مفاهيم الجبر الخطي لحل المسائل التطبيقية:

لحل أي مسألة تطبيقية يجب أن نضعها صياغة رياضية ولكل مسألة تطبيقية هدف والهدف إما أن يكون زيادة الربح أو تقليل الخسائر وذلك في المسائل الاقتصادية.

- أي في المسألة التطبيقية إما إيجاد قيمة عظمى لشيء ما أو إيجاد قيمة دنيا (أصغرية) علماً أنهما في هذه الحالة متناظران

* الصياغة الرياضية لأي مسألة تطبيقية هي إيجاد ما يلي:

1- إيجاد دالة نسميها دالة الهدف.

2- إيجاد جملة المعادلات التي تمثل محددات المسألة التطبيقية.

٣- (شرط عدم السلبية) جميع المتغيرات إيجابية ' نتيجتها ٥ أو قيم موجبة ".

غير حالات :

|1| ١- دالة الهدف من الدرجة الأولى.

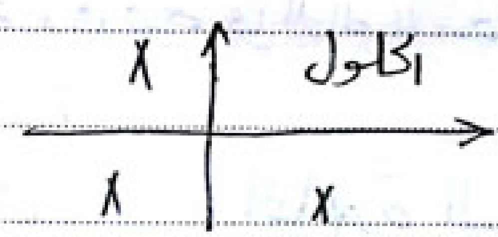
٢- جملة المعادلات الخطية وجميعها من الدرجة الأولى.

٣- شرط عدم السلبية.

نظام خطي (برنامج خطي).

إذا اختل أحد الشروط نقول عن البرنامج غير خطي ولكننا سنعالج فقط البرامج الخطية.

توضيح:



حلول المسائل التطبيقية محصورة في الربع الأول (شرط عدم السلبية)

هذا المفهوم يسمى مفهوم ؟

- ظهرت بحوث العمليات بشكل واضح في أثناء الحرب العالمية الثانية وكان الهدف منها

١- نقل القوات بأسرع وقت ممكن وأقل تكلفة.

٢- نقل الإمدادات من نقطة لأخرى وقت وأقل كلفة.

وأثناء الحرب كان هناك ثلاث مجموعات

١- ألمانيا وإيطاليا واليابان.

٢- أمريكا والدول الأوربية.

٣- الاتحاد السوفيتي.

ولكل مجموعة علوم وتدعى علوم عسكرية سرية

* المجموعة البحثية لبحوث العمليات تضم عدد من الباحثين في الرياضيات والإحصاء والاقتصاد والبيئة و.... إذ أ مجموعة من الباحثين المتعددي الاختصاصات.

في عام ١٩٥٠ تقدم الضباط المسرحين من الجيش الأمريكي بطلب إسناد مهمة بحوث العمليات للأغراض المدنية الهدف منها:

١- نقل النفط من الشرق الأوسط إلى أمريكا

٢- نقل الأشجار من الغابات إلى المصانع بأقل كلفة ووافقت وزارة الدفاع على ذلك ، ومنذ ذلك الحين سمح بتدريس بحوث العمليات في الجامعة الأمريكية بطريقة simplex metall في عام ١٩٦٠ ع الروسي بتدريس بحوث العمليات في الجامعات بالطريقة الروسية ؟

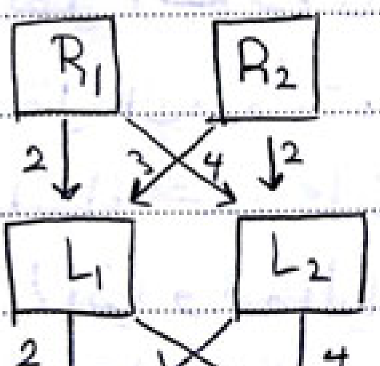
لبحوث العمليات تطبيقات واسعة وخاصة في المجال الاقتصادي والعسكري.

المحاضرة الثانية:

تطبيقات بحوث العمليات في تنظيم الإنتاج في المصانع:

أ-

مثال: تقوم إحدى الشركات بتصنيع المادتين C_1 و C_2 وذلك من خلال معالجة المواد الأولية R_1 و R_2 لإنتاج منتج من L_2 و L_1 وفق المخطط الإنتاجي التالي



المطلوب: تحديد كمية المواد الأولية اللازمة لتصنيع طلبية $\boxed{C_2 = 15 \ , C_1 = 10}$

$1 \longrightarrow L_2 \times L_1$

$\downarrow \quad \downarrow$

$4R_1 \quad 2R_2$

$C_1 \begin{cases} L_2 \xrightarrow{4} R_2 & R_2 = 8 \\ L_1 \longrightarrow R_1 & R_1 = 8 \end{cases}$

عشر قطع أي 8×10

$C_2 \begin{cases} R_1 = 6 \times 22 \\ R_2 = 17 \end{cases}$

	L_1	L_2
R_1	2	4
R_2	3	2

M_1 مرحلة أولى (إنتاجية أولى):

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

M_2 مرحلة إنتاجية ثانية:

	C_1	C_2
L_1	2	3
L_2	1	4

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

M مرحلة أخيرة

$$M = M_1 * M_2 = \begin{pmatrix} 8 & 22 \\ 8 & 17 \end{pmatrix}$$

C_1 | تحتاج ← R_1 8

R_2 8

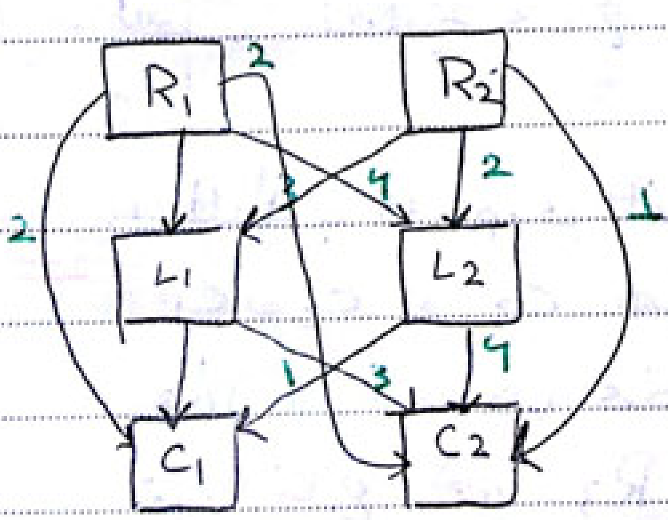
C_2 | ← R_1 22

R_2 17

$$C = \begin{pmatrix} 10 = c_1 \\ 15 = c_3 \end{pmatrix} \quad , \quad R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$$

$$M \times C = \begin{pmatrix} 8 & 22 \\ 8 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 410 \\ 335 \end{pmatrix}$$

نفس المثال السابق ولكن على المخطط الجديد:



M_1 =

	L_1	L_2
R_1	2	4
R_2	3	2

/ /

M_1

مصفوفات إنتاجية

$$M_2 = \begin{array}{c|cc} & C_1 & C_2 \\ \hline L_1 & 2 & 3 \\ L_2 & 1 & 4 \end{array}$$

مصفوفة زيادة

$$M_3 = \begin{array}{c|cc} & C_1 & C_2 \\ \hline R_1 & 2 & 2 \\ R_2 & 0 & 1 \end{array}$$

$$M' = M_1 * M_2 = \begin{pmatrix} 8 & 22 \\ 8 & 17 \end{pmatrix}$$

$$M' = \begin{array}{c|cc} & C_1 & C_2 \\ \hline R_1 & 8 & 22 \\ R_2 & 8 & 17 \end{array}$$

$$M = M' + M_3 = \begin{pmatrix} 8 & 22 \\ 8 & 17 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 10 & 24 \\ 8 & 18 \end{pmatrix}$$

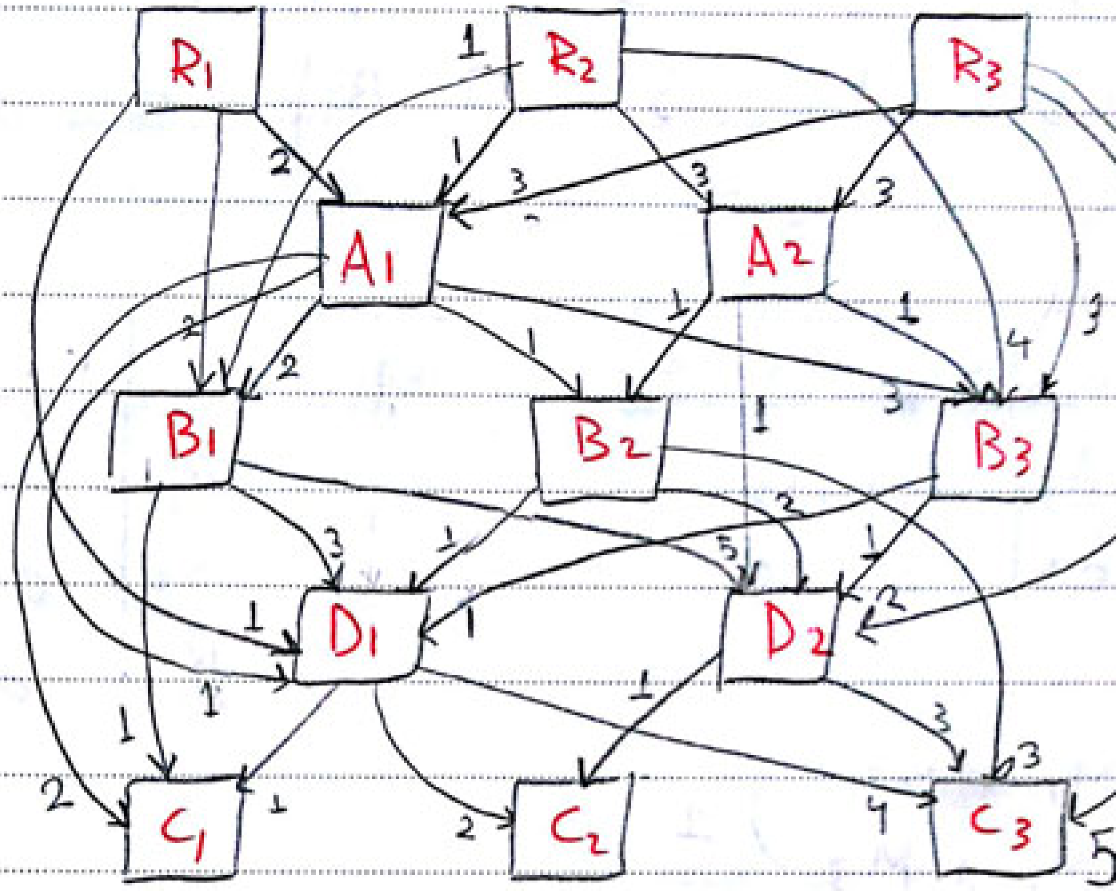
الإنتاج C_1 يحتاج 10 من R_1 و 8 من R_2

$$M * C = R \ : \ \begin{pmatrix} 10 & 24 \\ 8 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$$

لعملية الطلبية نحتاج $R_1 = 460$ و $R_2 = 350$

تمرين: المطلوب من إحدى المصانع كمية طلبية من ثلاث منتجات C_1 و C_2 و C_3 حيث $C_1 = 5$ و $C_2 = 7$ و $C_3 = 4$ علماً أنه توجد هنا عدة مراحل إنتاجية بينية وأن المواد الأولية المستخدمة في الإنتاج هي R_1 ، R_2 ، R_3

يوجد لدينا عدة مراحل إنتاجية مبينة علماً أن المخطط الإنتاجي هو:



$M_1 =$

	A_1	A_2
R_1	2	0
R_2	1	3
R_3	3	3

$M_5 =$

	D_1	D_2
A_1	1	0
A_2	0	1

$M_2 =$

	B_1	B_2	B_3
A_1	2	1	3
A_2	0	1	1

$M_6 =$

	D_1	D_2
R_1	1	0
R_2	0	1
R_3	0	2

$M_3 =$

	B_1	B_2	B_3
R_1	2	0	0
R_2	1	0	4
R_3	0	0	3

$M_7 =$

	C_1	C_2	C_3
D_1	1	2	4
D_2	0	1	3

$M_4 =$

	D_1	D_2
B_1	3	5
B_2	1	2
B_3	1	1

$$M_7 = \begin{array}{c|ccc} & c_1 & c_2 & c_3 \\ \hline D_1 & 1 & 2 & 4 \\ D_2 & 0 & 1 & 3 \end{array} \qquad M_{90} = \begin{array}{c|ccc} & c_1 & c_2 & c_3 \\ \hline B_1 & 1 & 0 & 0 \\ B_2 & 0 & 0 & 3 \\ B_3 & 0 & 0 & 6 \end{array}$$

$$M_9 = \begin{array}{c|ccc} & c_1 & c_2 & c_3 \\ \hline A_1 & 2 & 0 & 0 \\ A_2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad M_{10} = \begin{array}{c|ccc} & c_1 & c_2 & c_3 \\ \hline B_1 & 0 & 0 & 0 \\ B_2 & 0 & 0 & 0 \\ B_3 & 0 & 0 & 5 \end{array}$$

$$\left.\begin{aligned} M'_1 &= M_1 * M_2 \\ M'_2 &= M'_1 + M_3 \end{aligned}\right\} 1$$

$$\left.\begin{aligned} M'_3 &= M'_2 * M_4 \\ M'_4 &= M_1 * M_5 \\ M'_5 &= M'_3 + M'_4 + M_6 \end{aligned}\right\} 2$$

$$M'_6 = M'_5 * M_7$$

$$M'_7 = M_1 * M_9$$

$$M'_8 = M_3 * M_8$$

$$M'_9 = M_6 * M_7$$

$$\boxed{M = M'_6 + M'_7 + M'_8 + M_{10}} \qquad C = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

المحاضرة الثالثة:

نماذج بحوث العمليات:

بحوث العمليات تهدف لإيجاد حل مثالي لمسألة تطبيقية بحيث يكون التكلفة أقل ما يمكن أو كمية الإنتاج أعلى ما يمكن أو مدة الإنتاج تكون أقصر ما يمكن أو تكون كل هذه الأهداف مصاغة بهدف واحد (إذا التكلفة أقل ما يمكن والصغرة الفترة الزمنية أقل ما يمكن للإنتاج وكمية الإنتاج أعلى ما يمكن) وتكون الخسارة أقل ما يمكن).

يتكون نموذج مسألة بحوث العمليات من ثلاث نقاط رئيسية.

1- دالة هدف.

2- شروط المسألة.

3- شرط عدم السلبية.

ويمكن أن نميز أربع نماذج في بحوث العمليات:

النموذج الأول:

يكون على الشكل التالي:

(1) دالة الهدف
$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to Max(Min)$$

(2) شروط المسألة
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_n \end{cases}$$

شرط عدم السلبية
$$x_i \geq 0 \ ; \ i = \overline{1,n}$$

$$c_i \ , \ a_{ij} \in \mathbb{R} \ : \ i = \overline{1,n} \ , \ b_i \in \mathbb{R} \ , \ j = \overline{1,m} \ , \ i = \overline{1,m}$$

النموذج الثاني:

دالة الهدف. $\{ F = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \longrightarrow Max(min)$

شروط المسألة $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \geqslant b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \geqslant b_n \end{cases}$

شرط عدم السلبية. $\{ x_i \geqslant 0 \quad ; \quad i = 1:n$

$c_j, a_{ij} \in \mathbb{R} \quad , \quad i = 1:n \quad , j = 1:m \quad , b_i \in \mathbb{R} \quad i = 1:m$

النموذج الثالث:

دالة الهدف. $\{ F = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$

شروط المسألة $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \geqslant b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$

شرط عدم السلبية $\{ x_i \geqslant 0 \quad , \quad i = 1:n$

$c_{ij}\ a_{ij} \in \mathbb{R} \ ; \ i = 1:n \ , \ j = 1:m \ , b_i \in \mathbb{R} \ , \ i = 1:m$

النموذج الرابع: النموذج المختلط

دالة الهدف $\{ F = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \longrightarrow Max(Min)$

شروط المسألة $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \geqslant b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \leqslant \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn} \leqslant b_n \end{cases}$

شرط عدم السلبية $\{x_i \geq 0 \ ; \quad i = 1:n$

$c_i \, , a_{ij} \in \mathbb{R} \quad ; \ i = 1:n \ , \ j = 1:m \ , \ b_i \in \mathbb{R} \ ; \ i = 1:m$

مسألة البطاطا:

أحد مصانع البطاطا يستورد البطاطا من حقلين F_1 و F_2 وتختلف جودة المستورد (البطاطا) بين هذين الحقلين حسب التربة والسقاية الخ...

ويقوم المصنع بتصنيع ثلاث أنواع من المنتجات، وذلك من أجل تقليل كمية الهدر ومن خلال التجربة للمصنع يستطيع مدير المصنع من تحديد حاجة السوق لهذه المنتجات يجب مدير الشركة أن يحدد ماهي الكميات اللازم استيرادها من كل مصدر بحيث يلبي رغبة السوق ويكون الربح أعظم ما يمكن، علماً أن مدير الشركة استطاع تحديد قيمة الربح من كل وحدة إنتاجية من كل مصدر وقد استطاع وضع الجدول الآتي:

	F_1	F_2	الطلبية
النوع الأول	0,3	0,2	1,8
النوع الثاني	0,1	0,3	1,2
النوع الثالث	0,3	0,3	2,4
الربح لكل وحدة	6	5	

* لحل هذه المسألة يجب أن نوجد النموذج الرياضي لهذه المسألة أولاً.

المطلوب تحديد الكميات المطلوب استيرادها من المركز الأول ومن المركز الثاني وهي x_1 و x_2 بحيث يكون الربح أكبر ما يمكن.

هدف المسألة: $F = 6x_1 + 5x_2 \longrightarrow Max$

شروط المسألة
$$\begin{cases} 0.3x_1 + 0.2x_2 \leq 1.8 \\ 0.1x_1 + 0.3x_2 \leq 1.2 \\ 0.3x_1 + 0.3x_2 \leq 2.4 \end{cases}$$

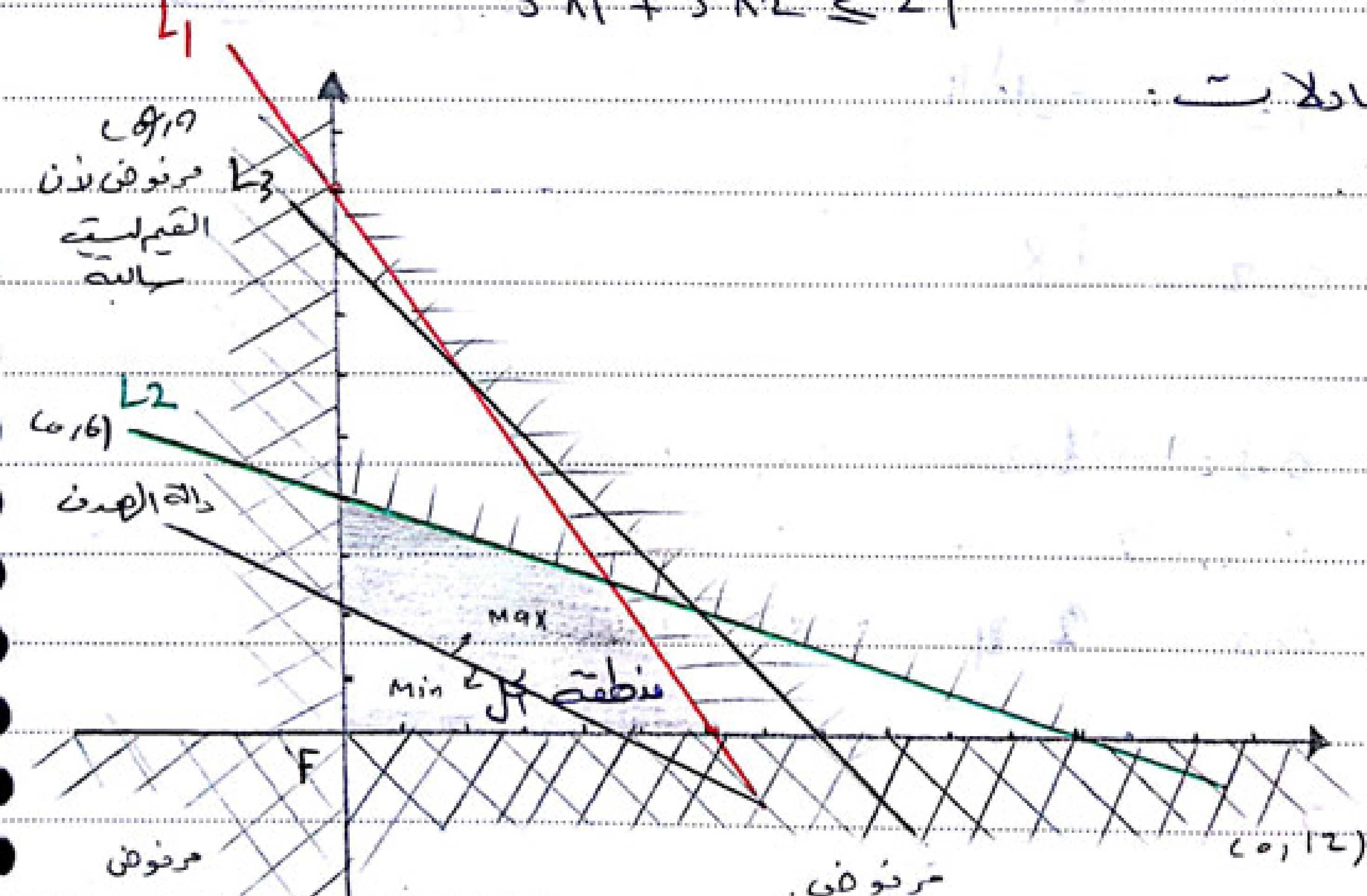
شرط عدم السلبية $\{x_1 , x_2 \geq 0$

سنضرب شروط المسألة بـ 10 (حسب خاصة إذا ضربنا المصفوفة بعدد لا تتغير محدد المصفوفة).

$$\Rightarrow \quad 3x_1 + 2x_1 \leq 18$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 12$$
$$3x_1 + 3x_2 \leq 24$$

سنحل هذه المعادلات:

لدينا مجهولين $\Leftarrow \mathbb{R}^2$.



(الرسم بدقة مهم)

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

معادلة مستقيم. $3x_1 + 2x_2 = 18$

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 9 \quad (0,9)$

$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 6 \quad (6,0)$

$L_2 \quad X_1 + 3X_2 \leq 12 \Rightarrow X_1 + 3X_2 = 12$

$X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 4 \Rightarrow (0,4)$

$X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 12 \Rightarrow (92,0)$

L_3

$3X_1 + 3X_2 \leq 24$

$3X_1 + 3X_2 = 24$

$X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 8 \Rightarrow (0,8)$

$X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 8 \Rightarrow (8,0)$

أخر نقطة مشتركة بين منطقة الحل ودالة الهدف تمثل الحل المثالي على الأقل أحد الرؤوس لمنطقة الحل يمثل الحل المثالي (قد يكون ضلع كامل) ومتعدد الأضلاع الناتج نسميه (مخطط) أو منطقة الحل أو متعدد الأضلاع الحل.

Point	(0,0)	(0,4)	(6,0)	(4.2, 2.7)
F	0	20	36	$\boxed{38.7}$ هي الحل الأمثل.

L_1 تقاطع L_2

$3X_1 + 3X_2 = 18$

$X_1 + 3X_2 = 12$

نضرب الثانية بـ -3 ⇐ $-7X_2 = -18$

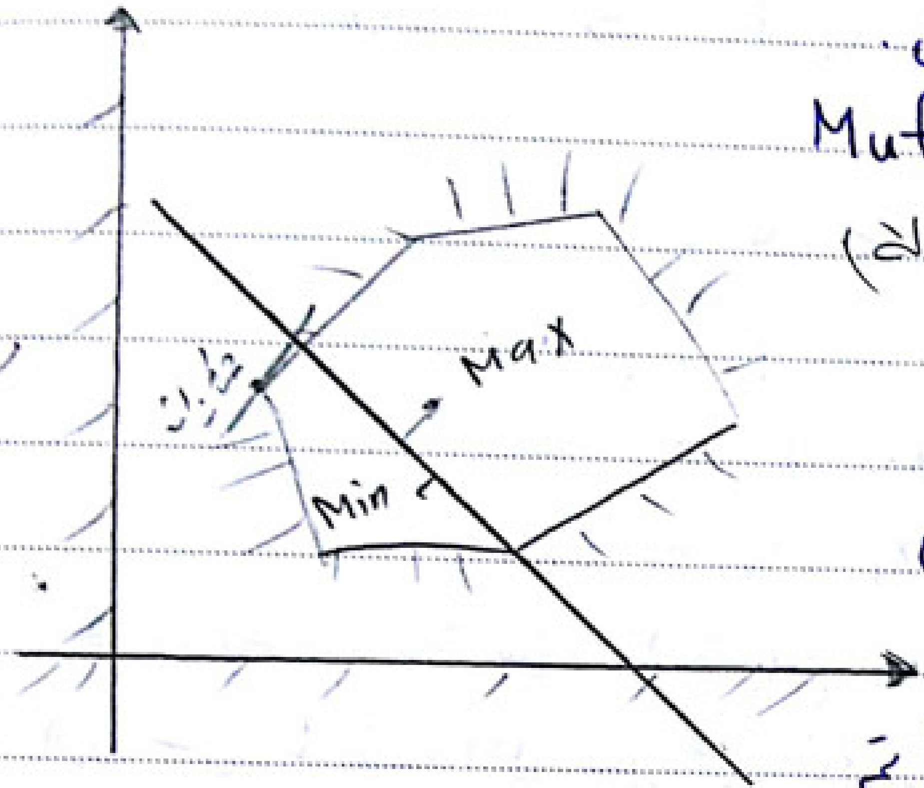
$\Rightarrow X_2 = 18/7 \approx 2.7$

$\Rightarrow X_1 + (2)(2.7) = 18 \Rightarrow x_1 = 4.2$

الحل الأمثل $X_2 = 4.2$ و $X_2 = 2.7$ و $F = 38.7$ هي

المحاضرة الرابعة:

الحالات الشاذة للبرامج الخطية:



١- عدد الحلول المثالية أكثر من حل.
Multiple Optimal solution
حالة وحيدة (بديل مختلف نتيجة دالة)

٢- الحل غير محدد
Un founded Soulution
في هذه الحالة إما أن يكون هناك خطأ في الحل الرياضي (النموذج) أو هناك شرط تم إغفاله.

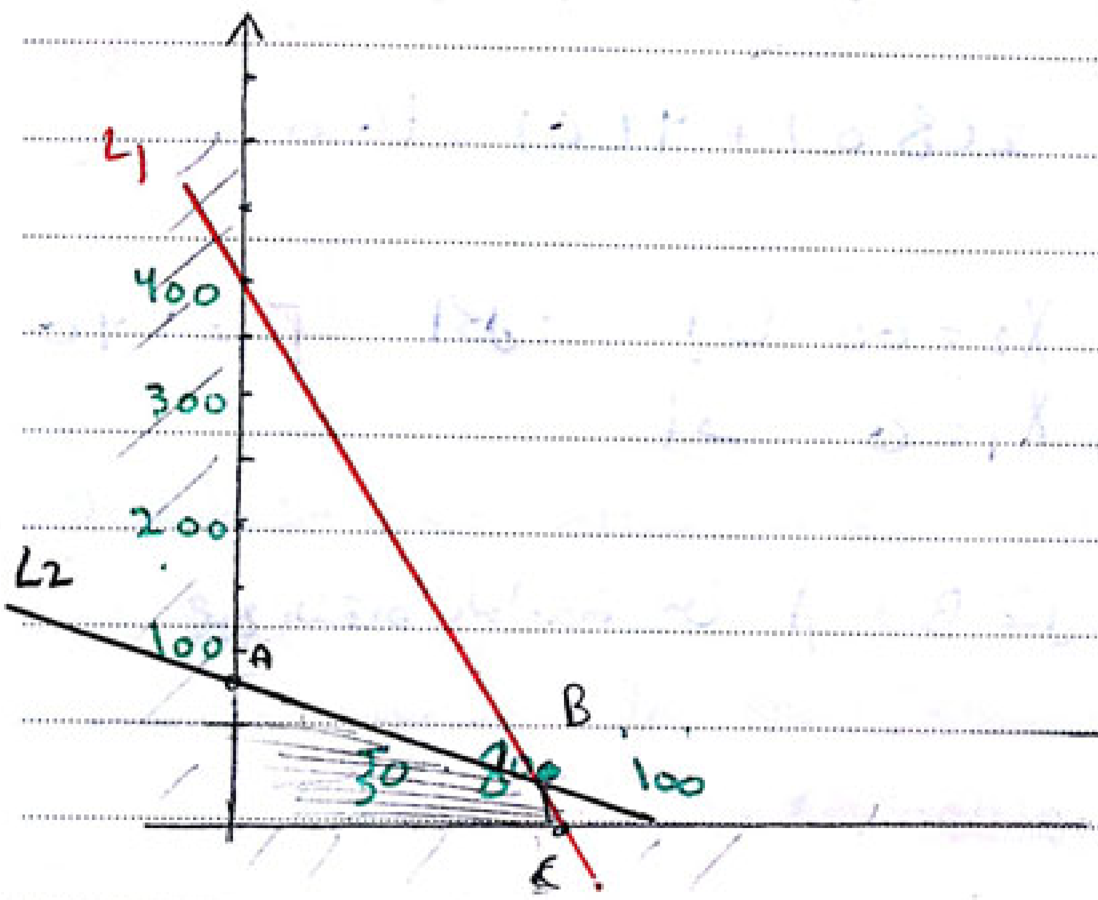
٣- الحل غير موجود (أي لا يوجد منطقة حل) وهنا يكون إما النموذج الرياضي خاطئ أو يوجد شرط تم إغفاله أي هناك خلل.

٤- الحل المخل (الدوار) Degenerate (التوقف في الحل ولا يخرج منه بعد)
في هذه الحالة يكون هناك شرط زائد في المسألة يشترك مع شروط أخرى في أحد رؤوس المضلع بحذف الشرط الزائد يتم الحل.
حل المسألة بشرط بشكل عام وفي حال تعرقل سير الحل نقوم بحذف الشرط الزائد. في الفضاء ثنائي البعد صعب أن نرى الحل الزائد ويكون أصعب في الفضاء الثلاثي البعد
أمثلة على هذه الحالات:
$\boxed{1}$ ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي

الهدف $F = 2X_1 + 4X_2 \longrightarrow Max$

القيود
$$\begin{cases} 5X_1 + X_2 \leq 400 \\ 4X_1 + 8X_2 \leq 480 \\ X_1 , X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب حل هذه المسألة بالطريقة البيانية لإيجاد الحل الأمثل.



$5X_1 + X_2 = 400$ L_1

$X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 80 \quad (80,0)$

$X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 400 \quad (0,400)$

$4X_1 + 8X_2 = 480 \quad (L_2)$

$X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 60 \quad (0,60)$

$X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 120 \quad (120,0)$

$$F = 2X_1 + 4X_2 \longrightarrow Max$$
$$5X_1 + X_2 \leq 400$$
$$8X_1 + 8X_2 \leq 480$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

$5X_1 + X_2 = 400 \Rightarrow 5X_1 + X_2 = 400$

$4X_1 + 8X_2 = 480 \Rightarrow X_1 + 2X_2 = 120$

$-9X_1 = -680 \Rightarrow 9X_1 = 680$

$X_1 = \frac{680}{9}$ $\qquad$ $5\left(\frac{680}{9}\right) + X_2 = 400$

$X_2 = \frac{200}{9}$ $\qquad$ $X_2 = -\frac{3400}{9} + \frac{3600}{9}$

Points	goal . F
$(0,0)$	0
$(0,60)$	$0+4(60)$
$(\frac{680}{9}, \frac{200}{9})$	$2(\frac{680}{9})+4(\frac{200}{9}) = 240$
$(80,0)$	$2(80)+4(0) = 160$

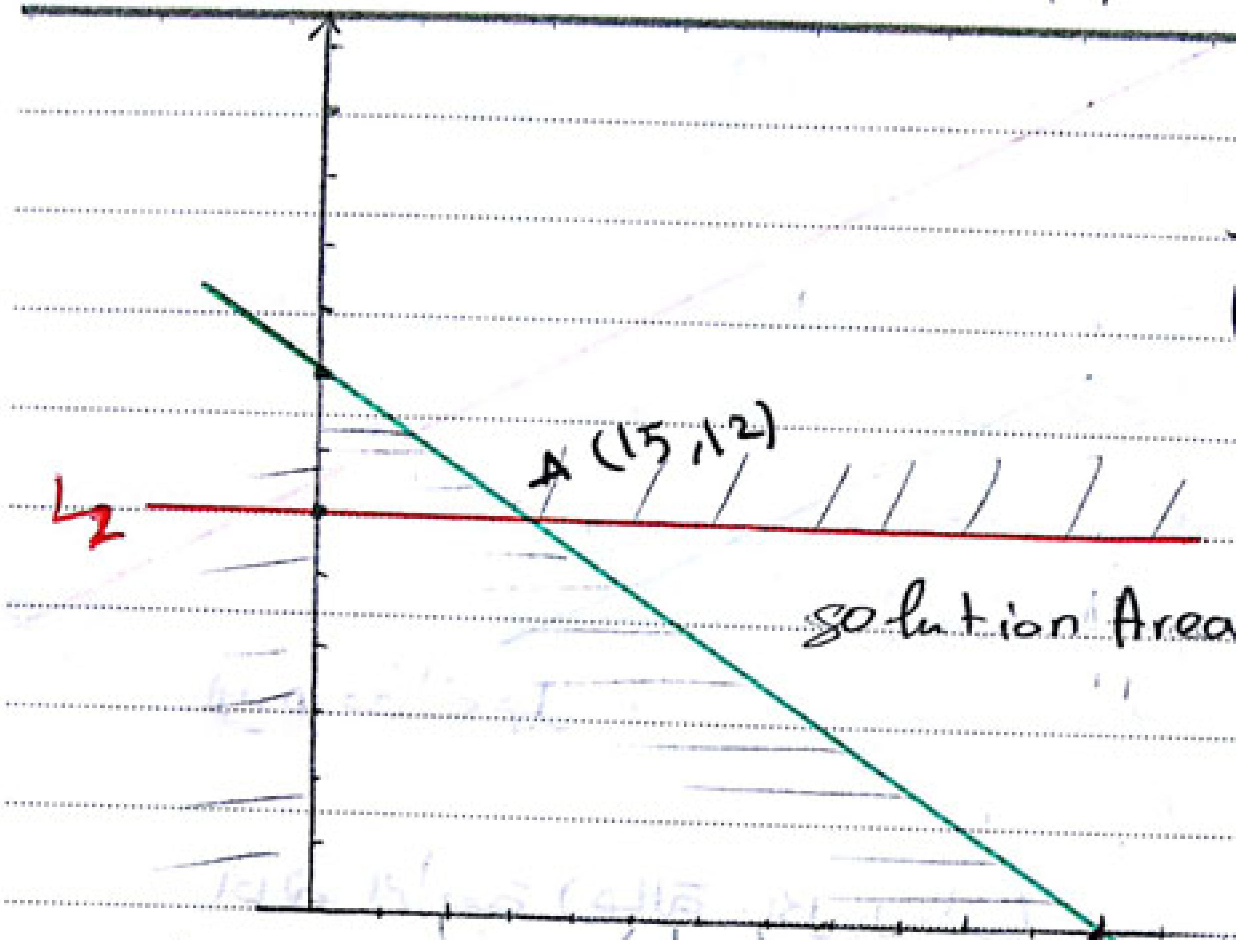
$F = 240$ الحل: إما $X_2 = 60$
أو $X_1 = 0$

جميع النقاط الواقعة بين A و B تمثل حلول لهذه المسألة.
مثبع معادلة AB هي: $0 \leq \alpha \leq 1$ ؛ $\alpha A + (1-\alpha)B$
يمكن نطلب منا أوجد أكثر من حل لهذه المسألة

الحالة الثانية: الحل غير محدود.
ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$F = 18X_1 + 23X_2 \longrightarrow Max$
$3X_1 + 5X_2 \geq 75$
$X_2 \leq 12$ هذا البرنامج مختلط لوجود $\leq$ و $\geq$ في شروط المسألة.
$X_1, X_2 \geq 0$

أولا: $3X_1 + 5X_2 = 75$ نفرض $X_1 = 0 \Leftarrow X_2 = 12$ $(0,15)$
$X_2 = 0 \Leftarrow X_1 = 25$ $(25,0)$



point	solution
(5,12)	10(5)+23(12)=326
(25,0)	10(25)+23(0)=250
(10,12)	10(10)+23(12)=376
(20,12)	10(20)+23(12)+476

في أي منطقة من المنطقة غير المظللة تحقق شروط المسألة.

الجواب:

كلما ابتعدنا عن المركز تزداد قيمة الحل الأمثل.

لذلك نحن أمام حالة حل غير محدود.

الحالة الثالثة (الحل غير موجود):

ليكن لدينا البرنامج التالي:

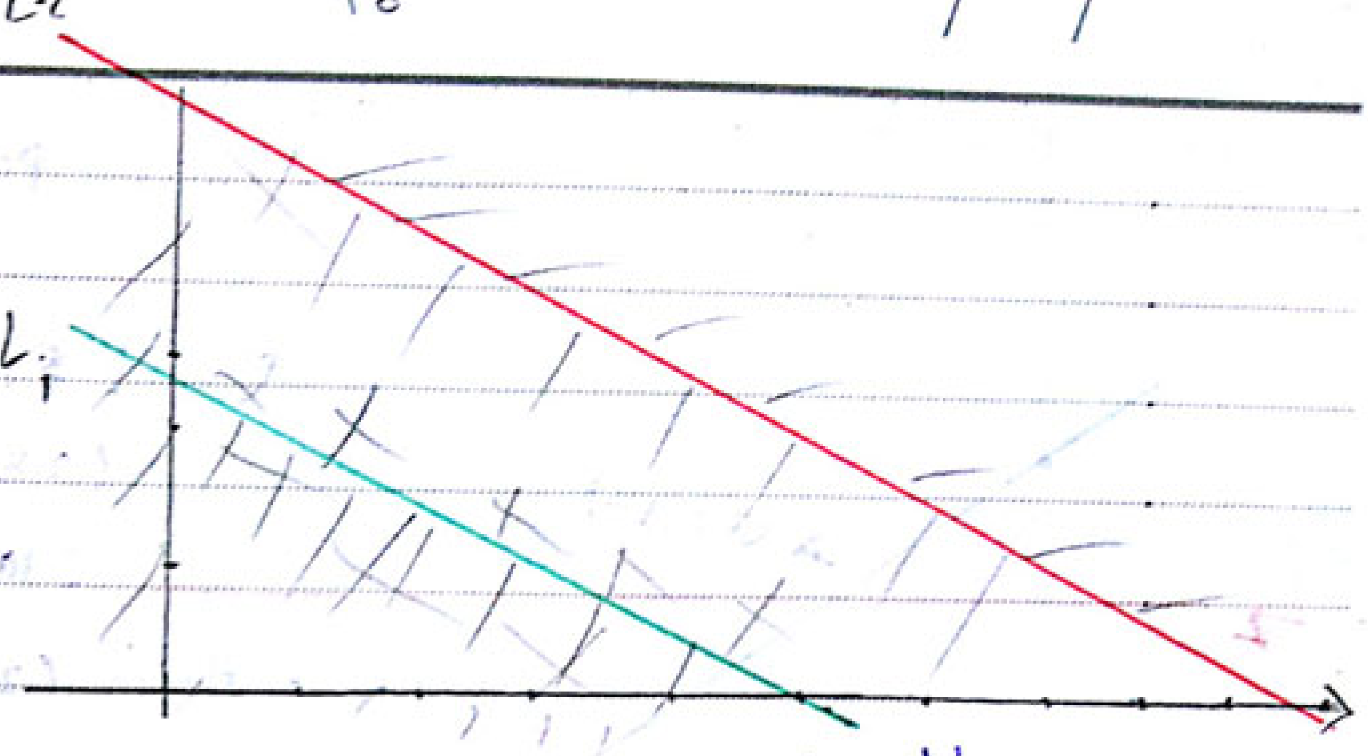
$$F = 20X_1 + 15X_2 \rightarrow Max$$

$5X_1 + 10X_2 \leq 25$ (0,25) , (5,0)

$5X_1 + 10X_2 \geq 50$ (0,5) , (10,0)

$X_1 , X_2 \geq 0$

أوجد الحل الأمثل لهذا البرنامج باستخدام الطريقة البيانية



لايوجد منطقة حل .

الحالة الرابعة (حالة الحل الدوار) :

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي :

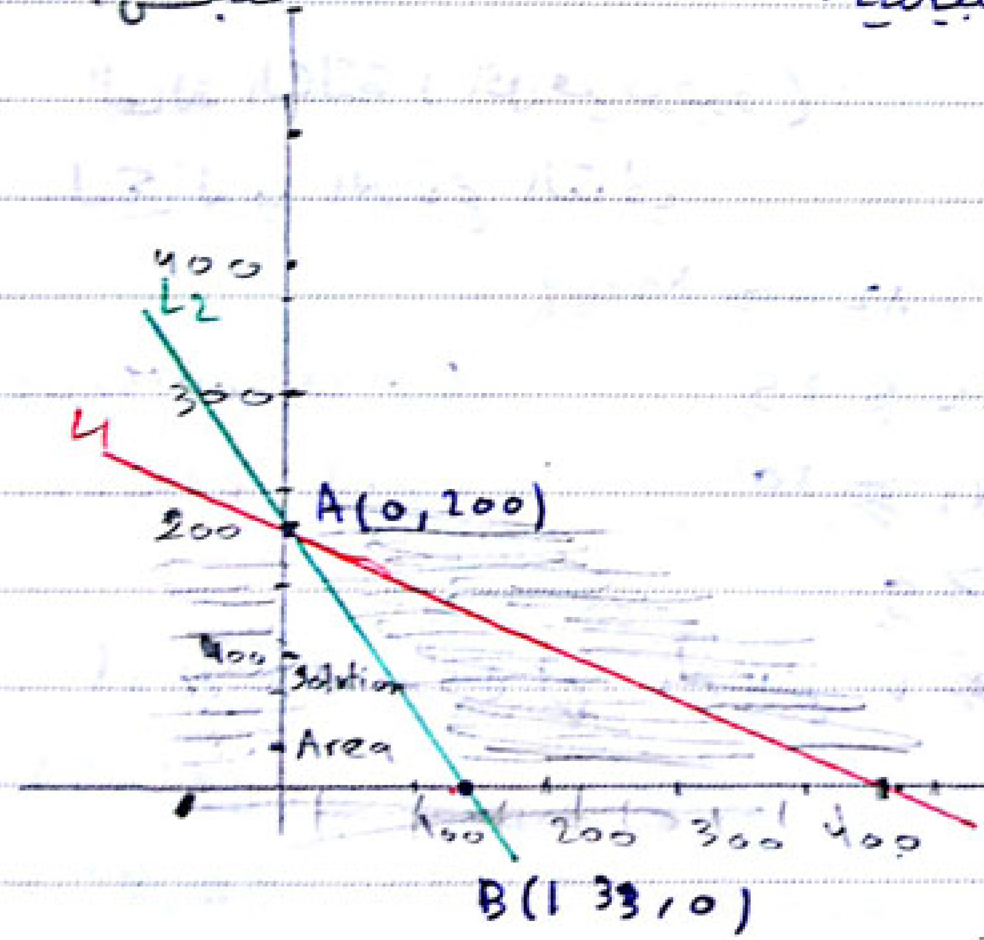
وردهذا المثال في الامتحان ولكن بطريقة معاكس .

$F = 12X_1 + 8X_2 \rightarrow Max$

$4X_1 + 9X_2 \leq 1,800$; $X_1 , X_2 \geq 0$

$3X_1 + 2X_2 \geq 400$

أوجد الحل الأمثل بالطريقة البيانية .



$L_1 : (0, 200)$ و $(450, 0)$

$L_2 : (0, 200)$ و $(133, 0)$

إذا كان عدد الشروط أكبر من بعد الفضاء بواحد على الأقل فنحن في حالة الحل الدوار .

Points	F
(0,0)	0
(0,200)	1600
(133,0)	1596

Optimal solution

$F = 1600$

$X_1 = 0$, $X_2 = 200$

حل البرامج الخطية بطريقة السمبلكس:

١ـ خوارزمية سمبلكس لحل البرامج الخطية من النوع الأول.

step(1) : نحول شروط المسألة من أصغر أو يساوي إلى مساواة وذلك بإضافة متغيرات خاملة لشروط المسألة بأمثال تساوي الواحد وبأمثال تساوي الصفر لدالة الهدف مع الحفاظ على شرط عدم السلبية.

step(2) : نرتب شروط المسألة ودالة الهدف في جدول والجدول يكون مكون من الأجزاء التالية.

الجزء الأول: يكون مكون من أمثال الشروط

الجزء الثاني: سيكون مصفوفة الوحدة

:

و السطر الأخير بالمصفوفة يمثل دالة الهدف مع تغيير إشارتها.

مثال:

$F = 2X_1 + 4X_2 \rightarrow Max$

$5X_1 + X_2 \leq 400 \rightarrow X_3$ ‏} نضيف مجهول خارجي

$4X_1 + 8X_2 \leq 480 \rightarrow X_4$

يوم تعمع

$$F = 2X_1 + 4X_2$$

$$5X_1 + X_2 + y_1 = 400$$

$$4X_1 + 8X_2 + y_2 = 480$$

	x_1	x_2	y_1	y_2	R.h
$y_1 = E_1$	5	1	1	0	400
$y_2 = E_2$	4	8	0	1	480
$-F$	-2	-4	0	0	0

عنصر فاصل هو
عنصر قائدة.

عمود الدوران.

في حالة Max [1] نبحث عن أصغر قيمة سالبة في دالة الهدف.

في حالة Min نبحث عن أكبر قيمة موجبة في دالة الهدف.

[2] العمود المرافق لهذه القيمة هو عمود الدوران.

[3] نقسم الطرف الثاني على عناصر عمود الدوران . ما عدا دالة الهدف

☆ أصغر نسبة موجبة تقابل ~~عنصر~~ سطر الدوران

☆ عنصر الدوران : هو العنصر الواقع لتقاطع عمود الدوران مع سطر الدوران.

[4] نجعل عنصر الدوران مساوياً للواحد وبقية عناصر الدوران مساوية للصفر

وذلك من خلال عمليات جبرية نضربها ونجمع.

y_1	4.5	0	1	-1	340
x_2	1/2	1	0	1	60
F	0	0	0	4	240

قيمة x_2

نكرر العمليات السابقة حتى لا يبقى أي عنصر سالب في دالة الهدف (في حالة Max) مقابل

(حتى لا يبقى أي عنصر موجب في حالة Min) : حالة أكثر من حل

ونلاحظ أننا أمام حالة عدد غير منتهٍ من الحلول كونه ظهر (عدد غير منتهٍ من الحلول)

كونه ظهر العدد (0) في دالة الهدف وذلك من خلال الجدول.

في عامود ليس كامود قاعدة

للحصول على بقية الحلول علي أن نعتبر العمود الموافق لهذا الصفر هو عمود

الدوران ونكرر الخطوات.

المحاضرة الخامسة:

توضيح مثال * من المحاضرة السابقة:

$$F = 2X_1 + 4X_2 \longrightarrow Max$$

$$5X_1 + X_2 \leq 400 \longrightarrow y_1$$

$$4X_1 + 8X_2 \leq 480 \longrightarrow y_2$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

$$F = 2X_1 + 4X_2 \longrightarrow Max$$

$$y_1 + 5X_1 + X_2 = 400$$

$$y_2 + 4X_1 + 8X_2 = 480$$

$$X_1 , X_2 \geq 0 , y_1 , y_2 \geq 0$$

	x_1	x_2	y_1	y_2	R.H
y_1	5	1	1	0	400
y_2					
$-F$	4	8	0	1	480
y_1	-2	-4	0	0	0
x_2	1/2	1	0	1/8	1

نحدد عمود الدوران بعد رسم الجدول

ثم نحدد سطر الدوران ثم نقوم

بالعمليات الجبرية نقسم على 8

	x_1	x_2	y_1	y_2	R.h
y_1	5	1	1	0	400
y_2	4	8	0	1	480
$-F$	-2	-4	0	0	0
y_1	$4\frac{1}{2}$	0	1	$-1/8$	240
x_2	$1/2$	1	0	$1/8$	60
F	0	0	0	$1/2$	240

الحل المثالي .

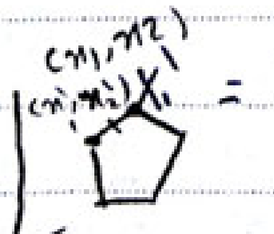
$x_1 = 0$

$x_2 = 60$

$F = 240$

x_1	1	0	$2/9$	$-\frac{1}{72}$	$\frac{680}{9} = 75.5$
x_2	0	1	$-1/9$	$\frac{10}{72}$	$\frac{200}{9}$
F	0	0	0	$\frac{1}{2}$	240

هل حصلنا ينتقل من رأس الى رأس لا يدخل لمنطقة الحل مثل



$X_1' = 75.5$ $\quad X_2' = \frac{200}{9}$ $\quad F = 240$.

نقاط تعطي نفس القطعة المستقيمة

$\tilde{X}_1 = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_1'$ حسب المتكي معادل الحالي اذا في جورينج ن.

$\tilde{X}_2 = \alpha x_2 + (1-\alpha) x_2'$

صفحة 205 من الكتاب: مسألة اتقان (وظيفة) للمحاضرة القادمة

تبيع مؤسسة صناعية أربع أنواع من الآلات D ، C ، B ، A وتحتاج المؤسسة الصناعية إلى المواد I_1 ، I_2 وساعات العمل للقيام بالعملية الإنتاجية الجدول أدناه يمثل المواد الأولية - ساعات العمل المطلوبة.

	A	B	C	D
I	18	24	20	16
II	8	12	21	18
ساعات العمل	6	4	7	5

تحل بطريقة السمبلكس

يتوفر في مركز المؤسسة الصناعية 800 طن من المواد الأولية I ، و400 طن من المواد الأولية II ، 150 ساعة عمل في كل أسبوع.

المطلوب صياغة المشكلة لهذه المسألة لإيجاد الحل الأمثل

- تكلفة الطن الواحد من المواد الأولية I 2 ألف.
- تكلفة الطن الواحد من المواد الأولية II 4 ألف.
- تكلفة ساعة العمل الواحدة 1 ألف.

تباع الآلات في السوق كما يلي:

نوع الآلة	سعر البيع
A	120
B	116
C	136
D	150

المطلوب صياغة المشكلة في شكل برمجة خطية. (أكمل في الكتاب)

مسألة البطا:

$$F = 6x_1 + 5x_2 \to Max$$

$2x_1 + 3x_2 \le 18 \to y_1$ نضيف للمعادلة y_1 مجهول فاصل $\qquad x_1 , x_2 \ge 0$

$2x_1 + x_2 \le 12 \to y_2$ 〃 〃 y_2 〃 〃

$3x_1 + 3x_2 \le 24 \to y_3$

المطلوب تطبيق خوارزمية سيمبلكس لإيجاد الحل الأمثل:

$$F = 6x_1 + 5x_2 \to Max$$

$$2x_1 + 3x_2 + y_1 = 18$$

$$2x_1 + x_2 + y_2 = 12$$

$$3x_1 + 3x_2 + y_3 = 24$$

$$x_1 , x_2 , y_1 , y_2 , y_3 \ge 0$$

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	R.h
y_1	2	3	1	0	0	18
y_2	2	1	0	1	0	12
y_3	2	3	0	0	1	24
$-F$	-6	-5	0	0	0	0
y_1	0	0	1	-1	0	6
x_1	1	$1/2$	0	$1/2$	0	6
y_3	0	$3/2$	0	$-3/2$	1	6
F	0	-2	0	$+3$	0	36
x_2	0	1	$1/2$	$-1/2$	0	3
x_1	1	0	$-1/4$	$3/4$	0	$9/2$
y_3	0	0	$-3/4$	$-3/4$	0	$15/4$
	0	0	1	2	0	42

الحل الأمثل: $x_1 = 9/2 \quad x_2 = 3 \quad F = 42$

النمط الثاني لخوارزمية السمبلكس:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \longrightarrow Max$$

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_n$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_n$$

$$x_i \geq 0 \; ; \quad i = n : m$$

خطوات خوارزمية السمبلكس:

$\boxed{1}$ إضافة مجاهيل فردية بأمثال (-1) في شروط المسألة وبأمثال صفر في دالة الهدف.

$$F = c_1x_1 + \dots + c_nx_2 \longrightarrow Max$$

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \quad , j = 1 : m$$

$$x_i \geq 0 \; , \; i = 1 : n \; , \; y_j \geq 0$$

$\boxed{2}$ نضيف مجاهيل اصطناعية بأمثال (~~-M~~ +1) بشروط المسألة في حالة الـ(Max) وبأمثال (-M) في دالة الهدف في حالة Max
وفي حالة (Min) نضيفها بأمثال (+M) حيث: M عدد صحيح موجب كبير بقدر كافي

يوجد سؤال

$\boxed{3}$ ~~القيم التي تقابل~~ في سطر دالة الهدف التي تقابل عناصر القاعدة نحولها إلى أصفار
(من خلال عمليات جبرية) أي نغير مواضع M
نطبق خوارزمية Simplex التي طبقتها في النموذج الأول.

~~مثال: ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:~~

مثال: ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي: سؤال امتحانه

$F = -3X_1 - 2X_2 - X_3 \longrightarrow Max$ حالة

$2X_1 + X_2 + X_3 \geq 4 \longrightarrow y_1 \rightarrow S_1$

$3X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 10 \longrightarrow y_2 \rightarrow S_2$

$-X_1 + 2X_2 - X_3 \geq 1 \longrightarrow y_3 \rightarrow S_3$

$\Rightarrow \quad F = -3X_1 - 2X_2 - X_3 - MS_1 - MS_2 - MS_3 \rightarrow Max$

أولاً نضيف المجاهيل الخاملة ثم نضيف S_1, S_2, S_3 معاملها $-M$

نضرب بنفيها السالبة

$2X_1 + X_2 + X_3 - y_1 + S_1 = 4$

$3X_1 + X_2 + 3X_3 - y_2 + S_2 = 10$

$-X_1 + 2X_2 - X_3 - y_3 + S_3 = 1$

$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0$

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	S_3	R.h
S_1	2	1	1	-1	0	0	1	0	0	4
S_2	3	1	3	0	-1	0	0	1	0	10
S_3	-1	2	-1	0	0	-1	0	0	1	1
بدلاً من $-F$	3	2	1	0	0	0	M	M	M	0
العمة F	3-4M	2-4M	1-3M	M	M	M	0	0	0	-15M
صفر S_1	5/2	0	3/2	-1	0	1/2	1	0	-1/2	7/2
S_2	7/2	0	7/2	0	-1	1/2	0	1	-1/2	19/2
x_2	-1/2	1	-1/2	0	0	-1/2	0	0	1/2	1/2
F	4-6M	0	2-5M	M	M	1-M	0	0	-1+2M	-1

نضيف عن صفر مقدمة سالبة

نزيد عمود المحور عن صفر كي نوجد

أصغر قيمة موجبة

ثم F الجديد تعطى بتغيير مواقع M

$\frac{2-4M}{2}$ $\quad -2+4M \quad 2-4M \quad 0 \quad 0 \quad 2-4M \quad 0 \quad 0 \quad \frac{-2+4M}{2}$ صفر الحقيقة $\quad -\frac{2+4M}{2}$

$\frac{6-8M}{2} \quad 2-4M \quad \frac{2-6M}{2} \quad M \quad M \quad 2\frac{M}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{30M}{2}$

المحاضرة السادسة:

تكملة البرنامج الخطي السابق في المحاضرة (5):

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	R.h
x_1	1	0	3/5	-2/5	0	1/5	2/5	0	-1/5	7/5
s_2	0	0	7/5	-7/5	-1	-1/5	-7/5	1	1/5	25/5
x_2	0	1	-1/5	-1/5	0	-2/5	1/5	0	2/5	6/5
F	0	0								
⋮										

نضرب x_1 بـ 2/5 / بمعامل [illegible] ثم نضرب بـ $-\frac{2}{7}$

ثم نجمع له s_2

نضرب s_2 بـ $\frac{1}{2}$ ونجمعها لـ s_1.

نضرب سطر المعادلة ونجمعه للسطر الذي نريد تصفيره.

***النموذج الثالث:** (خوارزمية سمبلكس للنموذج الثالث)

1- نضيف لشرط المسألة مجاهيل بأمثال 1 وبأمثال M في دالة الهدف في حالة Max.

2- نغير مواقع M في سطر دالة الهدف باستخدام عمليات جبرية.

3- نطبق الخوارزمية التي استخدمناها في النموذج الأول.

خوارزمية سمبلكس للنموذج الرابع:

Step(1) نضيف مجاهيل خاملة لشروط أصغر أو يساوي

step(2) : نضيف مجاهيل فرق ومجاهيل صناعية للشروط أكبر أو يساوي.

step(3) : نضيف مجاهيل صناعية للشروط المساواة وذلك وشبه ماسبق.

step(4) : نغير مواقع M في سطر دالة الهدف.

step(5) : نطبق خوارزمية السمبلكس التي نعرفها.

مثال: موجود صفحة 179 في الكتاب.

ليكن البرنامج الخطي: $F = 3X_1 + X_2 - X_3 \longrightarrow Max$

وفقاً للشروط التالية.

$$X_1 + X_2 + X_3 = 10 \longrightarrow t_1$$ نضيف مجهول صناعي.

$$2X_1 - X_2 \geq 2 \longrightarrow -s_1 + t_2$$ نضيف مجاهيل فرق

$$X_1 - 2X_2 + X_3 \leq 15 \longrightarrow y_1$$

$$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$$

الحل:

نضيف ~~شروط~~ مجاهيل فاصلة ومجاهيل فرق ومجاهيل اصطناعية فتكون الشروط وشبه مايلي:

$$X_1 + X_2 + X_3 + t_1 = 10$$

$$2X_1 - X_2 - s_1 + t_2 = 2$$

$$X_1 - 2X_2 + X_3 + y_1 = 15$$

$$X_1 , X_2 , X_3 , t_1 , s_1 , y_1 , t_2 \geq 0.$$

في حالة الـ Max نعطي M مضروبة بـ t_1 و M مضروبة بـ t_2 في دالة الهدف أي أنه:

$$F = 3x_1 + x_2 - x_3 - Mt_1 - Mt_2 \longrightarrow Max.$$

من أجل جعل معاملات t_1, t_2 في دالة الهدف تساوي صفر نضيف إليها:

$M \times$ معادلة t_1

$M \times$ معادلة t_2

⋮

	x_1	x_2	x_3	s_1	y_1	t_1	t_2	R.R
t_1	1	1	1	0	0	1	0	10
t_2	2	-1	0	-1	0	0	1	2
y_1	1	-2	1	0	1	0	0	15
$-F$	-3	-1	1	0	0	M	M	0
F الجديدة	$-3-3M$	-1	$1-M$	M	0	0	0	$-12M$

نكمل الحل كما هو موجود في الكتاب ....