البنى الجبرية 1

الدكتور : حمزة الحاكمي

المحاضرة : السادسة عشر

التاريخ : ٢٠١٦/١١/١٥

إعداد : أحمد أبو التوت

Web: www.syriamath.net

group: Improve our mathematics

مبرهنة : لتكن G زمرة عندئذ كل زمرة جزئية ناظمية في G هي نواة لتشاكل زمري غامر .

الاثبات :

لتكن G زمرة و H زمرة جزئية ناظمية في G عندئذ G/H معرفة وهي زمرة الخارج ولنعرف العلاقة f .

$$f : G \to \frac{G}{H}$$

$$\forall\, a \in G \;:\; f(a) = aH$$

فنجد أن العلاقة f تطبيق لأنه إذا كان $\forall \;\; a, b \in G \quad : \quad a = b \Longrightarrow aH = bH$

كما أن f تشاكل لأنه حسب التعريف : $f(a.b) = (a.b)H = (aH).(bH) = f(a).f(b)$

إن f غامر لأنه لأجل $d.H \;\in G/H$ عندئذ $d \in G$ ومنه $f(d) = d.H$

اثبتنا انه تشاكل زمري غامر بقي ان نثبت أن H نواة أي لنبرهن أن $H = \ker f$:

ليكن $x \in \ker f$ عندئذ $x \in G$ حيث $f(x) = x.H = H(\text{المحايد})$

لأن $x \in \ker f$ $\quad x.H = H$ ومنه $x \in H$ أي أن :

$$\ker(f) \subseteq H$$

الاحتواء المعاكس :

ليكن $y \in H$ وطالما H زمرة جزئية في G فإن $y \in G$ أي أن y ينتمي للمنطلق فنأخذ الصورة المباشرة له .

$$f(y) = \underbrace{y}_{y \in H} .H = \underbrace{H}_{\text{محايد المستقر}}$$

وهذا يبين أن $y \in \ker f$ ومنه $H \subseteq \ker f$

ومن الاحتوائين نجد :

$$\ker(f) = H$$

تعريف : ليكن G , G' زمرتين و ليكن $f : G \to G'$ تشاكلاً زمرياً ((*homomorphism*))

- إذا كان f متباين نسمي f مونومورفيزم ((*monomorphism*))
- إذا كان f غامر نسمي f ايبومورفيزم ((*epomorphism*))
- إذا كان f تقابل (تماثل) نسمي f ايسومونفيزم ((*Isomonphism*))
- إذا كان $G = G'$ نسمي f إندومورفيزم ((*endomorphism*))

- إذا كان f تقابل و $G = G'$ نسمي f أتومورفيزم $((Automorphism))$ ((تماثل ذاتي))

تعريف :

ليكن $f : G \to G'$ تشاكلاً زمرياً إذا كان f تقابل نقول أن f $((Isomorphism))$ونقول أن G يماثل G' ونرمز لذلك :

$$G \cong G'$$

مبرهنة التماثل الأولى :

ليكن $f : G \to G'$ تشاكلاً زمرياً عندئذ :

١) $G/\ker(f) \cong Im\,(f)$

٢) إذا كان f غامر فإن : $G/\ker(f) \cong G'$.

الاثبات :

١) وجدنا سابقا أن $\ker f$ هي زمرة جزئية ناظمية في G وبالتالي فإن زمرة الخارج $G/\ker f$ معرفة . لنعرف العلاقة

$$\varphi : \frac{\mathrm{G}}{\ker f} \to Im(f) = f(G)$$

بالشكل الاتي :

$$\forall\, x.\ker(f) \in G/\ker f$$

$$\varphi(x.\ker(f)) = f(x)$$

وإن φ تطبيق لأنه إذا كان :

$$x.\ker(f)\ ,y.\ker(f) \in G/\ker f \quad : \quad x.\ker(f) = y.\ker(f)$$

ومنه يوجد $a \in \ker(f)$ بحيث $x = ya$

$$f(x) = f(y.a) = f(y)f(a) = f(y)$$

اي أن $\varphi(x.\ker(f)) = \varphi\,(y.\ker(f))$

وهذا يبين أن φ تطبيق وهو أيضا تشاكل لأن :

$$\varphi\big((x.\ker(f)).(y.\ker(f))\big) = \varphi\,(x.y).\ker(f)\,)$$

وحسب تعريف φ:

$$= f(x).f(y)$$

$$= \varphi\,(x.ker(f)\,)\varphi\,(y.ker(f)\,)$$

وإن f متباين لأنه إذا كان :

$$\varphi\,(x.ker(f)\,) = \varphi\,(y.ker(f)\,)$$

عندئذ حسب تعريف φ فإن $f(x) = f(y)$

نضرب بمقلوب $f(y)$ فنجد :

$$f(x).f(y^{-1}) = e'$$

بما أن φ تشاكل فإن $f(x.y^{-1}) = e'$

$$f\Big(\underbrace{x.y^{-1}}_{\epsilon\, G}\Big) = \underbrace{e'}_{\text{عنصر صورته محايد المستقر}}$$

فإن : $x.y^{-1}\,\epsilon\, ker(f)$

وبالتالي يوجد $b\,\epsilon\, ker(f)$ بحيث :

$$x.y^{-1} = b$$

نضرب الطرفين بعنصر y من اليمين $x = b.y \in ker(f).y = y.ker(f)$ وإن $x \in x.ker(f)$

ومنه بما ان التقاطع غير خالي لانتماء العنصر x فإن

$$x.ker(f) = y.ker(f)$$

أخيرا φ غامر لأنه إذا كان $z\,\epsilon\, f(G)$ بحيث :

$$z = f(d) \quad : d\,\epsilon\, G$$

ومنه : $d.ker(f)\ \epsilon\ G/\ker f$

$$\varphi\,(d.ker(f)\,) = f(d) = z$$

مما سبق نجد أن φ تماثل ومنه :

$$G/\ker(f)\ \cong\ Img\,(f)$$

٢) لنفرض أن f غامر عندئذ :

$$Im(f) = G'$$

وحسب (1) فإن

$$G/\ker(f) \cong G'$$

مبرهنة التماثل الثانية :

لتكن G زمرة و k,H زمرتين جزئيتين في G إذا كانت k ناظمية في G عندئذ :

$$\frac{H.k}{k} = \frac{k.H}{k} = \frac{< H \cup k >}{k} \cong \frac{H}{H \cap k}$$

البرهان : فكرة البرهان أن $\frac{<H\cup k>}{k} = \frac{k.H}{k} = \frac{H.k}{k}$ قد تم اثباتها من قبل ووضعت لأنها من اصل مبرهنة التماثل الثانية ويكفي ان ثبت ان احداها هي تماثل $\frac{H}{H\cap k}$.

لنعرف العلاقة : $f : H \to \frac{k.H}{k}$ بالشكل :

$$\forall\, h \in H \quad ; \quad f(h) = h.k$$

وحسب تعريفنا للجداء فإن $H \subseteq k.H$ فنجد أن f تطبيق لأنه إذا كان :

$$h_1, h_2 \in H \quad : \; h_1 = h_2 \;\Rightarrow\; h_1.k = h_2.k$$

$$\Rightarrow f(h_1) = f(h_2)$$

وأيضا f تشاكل :

$$f(h_1.h_2) = (h_1.h_2).k$$

وحسب تعريف الضرب في زمرة الخارج

$$= (h_1.k).(h_2.k) = f(h_1).f(h_2)$$

وهذا غامر لأن إذا كان $\bar{z} \in \frac{k.H}{k}$ حيث $\bar{z}$ مرافقة للزمرة k في kH عندئذ يوجد $g \in k.H$ بحيث $\bar{z} = g.k$

وبما أن $g \in k.H$ فإنه حسب تعريف الجداء :

$$h \in H \;,\; x \in k \quad ; \; g = x.h$$

ومنه $\overline{z} = g.k = (x.h).k$

وحسب تعريف الضرب في زمرة الخارج :

$$\overline{z} = (x.k)(h.k)$$

$$\overline{z} = k.(h.k) = h.k$$

((وحسب التعريف وبما أن $x \epsilon H$ و H هي المنطلق لنأخذ الصورة المباشرة لـx))

$$f(x) = x.k = \overline{z}$$

وحسب مبرهنة التماثل الأولى $\frac{H.k}{k} \cong \frac{H}{\ker f}$ لا يمكننا برهان التماثل المطلوب بنص المبرهنة مباشرتا لذلك استعنا بمبرهنة التماثل الأولى ثم سنبرهن تساوي

$$\ker f = H \cap k$$

ليكن $a \epsilon \ker f$ عندئذ :

$$f(a) = \underbrace{k}_{\text{محايد المستقر}}$$

وحسب التعريف فإن : $f(a) = a.k$

وهنا نجد أن $a.k = k$ وبالتالي $a \epsilon k$

وكون $\ker f$ في المنطلق فإن $a \epsilon H$ فنجد أن $a \epsilon H \cap k$ وبالتالي

$$\ker f \subseteq H \cap k$$

الاحتواء المعاكس :

ليكن $b \epsilon H \cap k$ وطالما $b \epsilon H$ فنأخذ الصورة المباشرة $b \epsilon k$ حيث :

$$f(b) = b.k = k$$

عنصر في المنطلق مرتبط بالمحايد في المستقر ومنه :

$b \epsilon \ker f$ أي أن $H \cap k \subseteq \ker f$

ومن الاحتوائين نجد : $H \cap k = \ker f$ و عليه يكون :

$$\frac{\mathrm{H}}{H \cap K} = \frac{H}{Ker(f)} \cong \frac{k.H}{H}$$

مبرهنة التماثل الثالثة :

لتكن G زمرة و k,H زمرة جزئية ناظمية في G بحيث $k \subseteq H$ عندئذ :

١) الزمرة k ناظمية في H .
٢) الزمرة H/k ناظمية في G/k .
٣) $G/H \cong \frac{G/k}{H/k}$

الاثبات :

١) تم مبرهنتها سابقا ولكن لفائدتها في المبرهنة تم وضعها .
٢) لنعرف العلاقة

$$f : G/k \to G/H$$

بالشكل الآتي $f(gk) = gH \quad ; \quad \forall gk \in G/k$

ان f تطبيق لآنه اذا كان $xk, yk \in G/k \ : xk = yk$

لنضرب بمقلوب yk

$$(xk).(yk)^{-1} = k$$
$$(xk).(y^{-1}k) = k$$
$$(xy^{-1}).k = k$$

ومنه $(xy^{-1}) \in k \subseteq H$ اي ان

$$(xy^{-1}).H = H$$
$$(xH).(y^{-1}H) = H$$
$$(xH).(yH)^{-1} = H$$
$$xH = yH$$
$$f(xk) = f(yk)$$

أن f تشاكل لآنه

$$f\big((xk).(yk)\big) = f(xyk) = (xy)H = (xH).(yH) = f(xk).f(yk)$$

ولنبرهن الان على أن $\ker f = H/k$

ليكن $ak \in \ker f$ حيث $a \in G$ عندئذ :

$$f(ak) = aH = H$$

ومنه $a \in H$ وبالتالي $ak \in H/k$ أي أن

$$\Longrightarrow \ker f \subseteq H/k$$

الاحتواء المعاكس :

وليكن $g.k \in H/k$ عندئذ $g \in H$

ونأخذ الصورة المباشرة : $f(g.k) = gH = H$

ومنه $g \in \ker f$ أي أن $H/k \subseteq \ker f$

ومن الاحتوائين نجد أن $H/k = \ker f$

ومنه كون $\ker f$ زمرة جزئية ناظمية في المنطلق فإن H/k زمرة جزئية ناظمية في G/H .

٣) لإثبات التماثل يجب إثبات أن التشاكل f غامر :

ليكن $zH \in G/H$ عندئذ $z \in G$

ومنه فإن $z.k \in G/k$ وطالما هذا العنصر ينتمي للمنطلق نأخذ الصورة المباشرة له

$$f(z.k) = zH$$

وهذا يبين أن f غامر .

وحسب مبرهنة التماثل الأولى وبما أن $\ker f = G/H$ فإن :

$$\frac{G/k}{H/k} \cong G/H$$

"انتهت المحاضرة"