2016/11/14 م 13

الإثبات:

ليكن $\vec{r}_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ طريقاً نظامياً من الصف $C^1$ قطعياً

حسب برهنة (2) $\ell(\vec{r}_1) = \int_a^b \|\vec{r}_1'(t)\| dt$

ونفرض تجزئة للمجال $[a,b]$ ولتكن $P_1 = \{t_0 = a, t_1, \dots, t_n = b\}$

حيث يكون $\vec{r}_1'(t)$ مستمر و $\vec{r}_1'(t) \neq 0$ لأجل كل $t$ من $[a,b] \setminus P_1$.

وليكن $\vec{r}_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^3$ طريقاً نظامياً من الصف $C^1$ قطعياً ومكافئاً لـ $\vec{r}_1$ عندئذٍ (حسب برهنة 2)

$\ell(\vec{r}_2) = \int_c^d \|\vec{r}_2'(\tau)\| \cdot d\tau$ ونفرض تجزئة للمجال $[c,d]$

ولتكن $P_2 = \{c = \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n = d\}$ حيث يكون $\vec{r}_2'(\tau)$ مستمرة و $\vec{r}_2'(\tau) \neq 0$ لأجل كل $\tau$ من $[c,d] \setminus P_2$.

و $\vec{r}_2(\tau) = \vec{r}_1(\phi(\tau))$ لأجل دالة $\phi : [c,d] \to [a,b]$ مستمرة متزايدة وتامة (تكافؤ $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$)

والمطلوب إثبات $\ell(\vec{r}_1) = \ell(\vec{r}_2)$

وللوصول لذلك نثبت أن $\int_a^b \|\vec{r}_1'(t)\| dt = \int_c^d \|\vec{r}_2'(\tau)\| d\tau$ ①

نقاط تجزئة هي التي نعمل من أجل كل أما مشتق موجود ولكنه معدوم أو غير موجود [illegible] [illegible]

فرضية إثبات مبرهنة سابقة

إذن: ② $\frac{d\vec{r}_2}{d\tau}(\tau) = \frac{d\vec{r}_1}{dt}(\phi(\tau)) \cdot \frac{d\phi}{d\tau}(\tau)$

بدون تقطيع لأجل $\tau \in A = ([c,d] \setminus P_2) \cap \phi^{-1}([a,b] \setminus P_1)$

لا تضمن وجود المشتق $\frac{d\vec{r}_2}{d\tau}(\tau)$

لا تضمن وجود المشتق $\frac{d\vec{r}_1}{dt}$

لتكن $\phi(\tau)$ دالة قابلة للاشتقاق عند كل $\tau \in A$.

لنأخذ $\tilde{\tau} \in A$ كيفية

$$\frac{\phi(\tau)-\phi(\tilde{\tau})}{\tau-\tilde{\tau}} \ne 0 \quad \left|\frac{\phi(\tau)-\phi(\tilde{\tau})}{\tau-\tilde{\tau}}\right|$$

$$= \left|\frac{\phi(\tau)-\phi(\tilde{\tau})}{\tau-\tilde{\tau}}\right| \cdot \frac{\|\vec{r}_1(\phi(\tau))-\vec{r}_1(\phi(\tilde{\tau}))\|}{\|\vec{r}_1(\phi(\tau))-\vec{r}_1(\phi(\tilde{\tau}))\|}$$

حسب خاصية القيمة المطلقة $\|\lambda \vec{a}\| = |\lambda| \, \|\vec{a}\|$

$$\Rightarrow \; = \underbrace{\left\|\frac{\vec{r}_1(\phi(\tau))-\vec{r}_1(\phi(\tilde{\tau}))}{\tau-\tilde{\tau}}\right\|}_{(1)} \cdot \frac{1}{\underbrace{\left\|\frac{\vec{r}_1(\phi(\tau))-\vec{r}_1(\phi(\tilde{\tau}))}{\phi(\tau)-\phi(\tilde{\tau})}\right\|}_{(2)}}$$

مشتقة هذه الدالة موجودة إذا كانت نهايتها عند $\tau \to \tilde{\tau}$ موجودة ومحدودة.

لكن هنا لدينا جداء دالتين عندها تكون نهاية موجودة ومحددة إذا كان كل من المضروب الأول والثاني موجود ومحدد عند $\tau \to \tilde{\tau}$ مع العلم أن نهاية نظيم دالة يساوي نظيم نهاية دالة.

$$\lim_{\tau\to\tilde{\tau}} \frac{\vec{r}_1(\phi(\tau))-\vec{r}_1(\phi(\tilde{\tau}))}{\tau-\tilde{\tau}} \quad \lim \frac{\vec{r}_2(\tau)-\vec{r}_2(\tilde{\tau})}{\tau-\tilde{\tau}} = \vec{r}_2{}'(\tilde{\tau})$$

موجودة لكن $A \ni \tilde{\tau}$

النظيم دالة مستمرة

$$\lim \left\|\frac{\vec{r}_1(\phi(\tau))-\vec{r}_1(\phi(\tilde{\tau}))}{\tau-\tilde{\tau}}\right\| = \|\vec{r}_2{}'(\tilde{\tau})\|$$

بما أن

$$\lim_{t\to\phi(\tilde{\tau})} \frac{\vec{r}_1(t)-\vec{r}_1(\phi(\tilde{\tau}))}{t-\phi(\tilde{\tau})} = \vec{r}_1{}'(\phi(\tilde{\tau})) \ne \vec{0}$$

لكل $\tilde{\tau} \in A$

لأن هذه نهاية موجودة ولو جعلنا المتغير $t = \phi(\tau)$ عندها نهاية متساوية والناتج موجودة

$$\lim_{\tau\to\tilde{\tau}} \frac{\vec{r}_1(\phi(\tau)) - \vec{r}_1(\phi(\tilde{\tau}))}{\phi(\tau) - \phi(\tilde{\tau})} = \lim_{t\to \tilde{t}} \frac{\vec{r}_1(t) - \vec{r}_1(\phi(\tilde{\tau}))}{t - \phi(\tilde{\tau})}$$ نفرض

$$t = \phi(\tau) \xrightarrow{\text{مستمرة } \phi} \phi(\tilde{\tau})$$

$$= \vec{r}_1{}'(\phi(\tilde{\tau})) \neq \vec{0}$$

مستمر $\|\cdot\|$ $\Rightarrow \lim \left\| \frac{\vec{r}_1(\phi(\tau)) - \vec{r}_1(\phi(\tilde{\tau}))}{\phi(\tau) - \phi(\tilde{\tau})} \right\| = \|\vec{r}_1{}'(\phi(\tilde{\tau}))\|$

$$\Rightarrow \lim \frac{\phi(\tau) - \phi(\tilde{\tau})}{\tau - \tilde{\tau}} = \|\vec{r}_2{}'(\tilde{\tau})\| \cdot \frac{1}{\|\vec{r}_1{}'\phi(\tilde{\tau})\|}$$

⇐ $\phi$ قابلة للاشتقاق على $A$

$\phi$ متزايدة ⇐ تزايدية $0 < \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\|\vec{r}_2{}'(\tau)\|}{\|\vec{r}_1{}'\phi(\tau)\| \neq 0} \quad \forall \tau \in A$

وبما أن $\phi(A) \subseteq [a,b]$ فإن $\vec{r}_1$ قابل للاشتقاق على $\phi(A)$

⇐ $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 \circ \phi$ قابلة للاشتقاق على $A$ ومنه

تحققت العلاقة (2):

$$\frac{d\vec{r}_2}{d\tau}(\tau) = \frac{d\vec{r}_1}{dt}(\phi(\tau)) \cdot \frac{d\phi}{d\tau}(\tau) \quad \forall \tau \in A$$

والآن لنثبت (1)

لو كان من نقط خلافية ← $\ell(\vec{r}_1) = \int_a^b \|\vec{r}_1{}'(t)\| \, dt$ → تكامل محدد لكون $\vec{r}_1$ قطعية

بسبب اعتلالها الجزئية = $\sum_{k=1}^{l} \int_{u_{k-1}}^{u_k} \|\vec{r}_1{}'(t)\| \, dt$ ← قد يكون معتل بسبب هو الأطراف

حيث $\phi(P_1) = \{u_0 = a, u_1, \ldots, u_l = b\}$ و $P_1$ تجزئة لـ $[a,b]$

$\vec{r}_1$ هو من الصنف $C^1$ على المجالات $[u_{k-1}, u_k]$

* نجري تغيير في المتغير في كل من التكاملات أعلاه من الشكل

$$t=\phi(\tau) \quad \text{أو} \quad \tau=\phi^{-1}(t)$$ لأن $\phi$ متزايدة ودائماً عندها تقابل.

$$\Rightarrow dt = \phi'(\tau)\,d\tau$$

$$\ell(\vec{r}_1) = \sum_{k=1}^{\ell}\int_{\phi^{-1}(u_{k-1})}^{\phi^{-1}(u_k)} \|\vec{r}_1'(\phi(\tau))\|\,\phi'(\tau)\,d\tau$$

$|\phi'| =$ (هي دالة متزايدة نزيله)

$$= \sum_{k=1}^{\ell}\int_{\phi^{-1}(u_{k-1})}^{\phi^{-1}(u_k)} \|\vec{r}_1'(\phi(\tau))\cdot\phi'(\tau)\|\,d\tau$$

بالاستفادة من ...

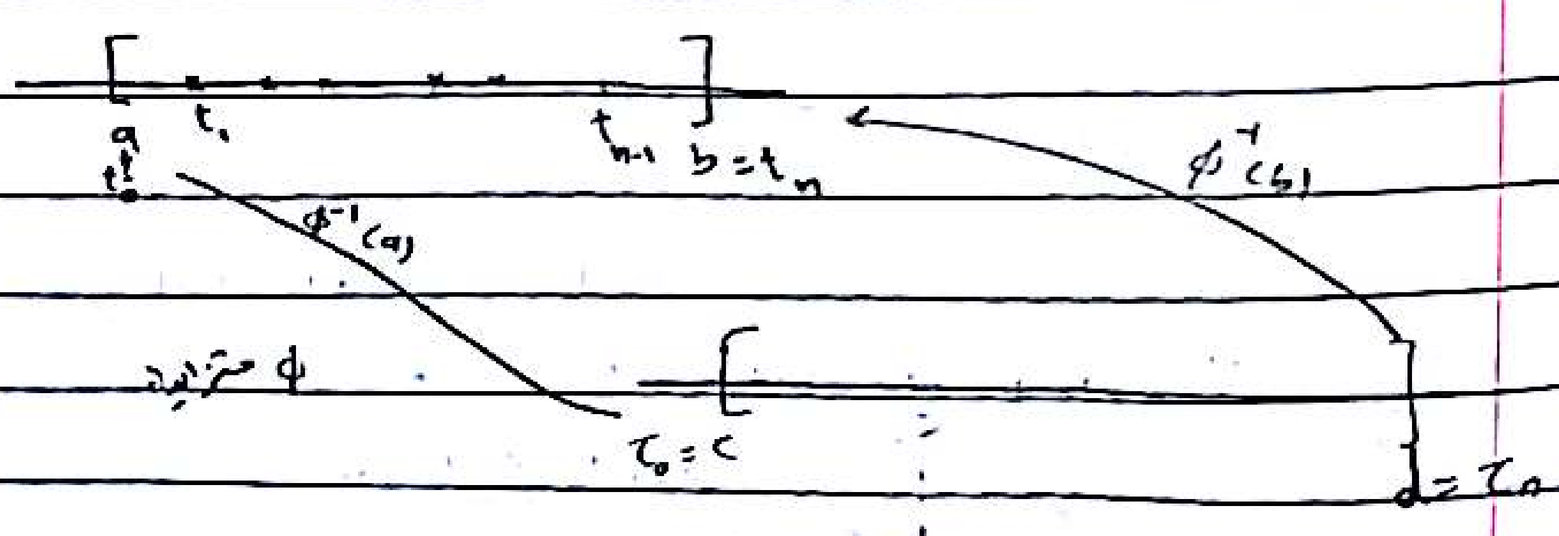
$$= \sum_{k=1}^{\ell}\int_{\phi^{-1}(u_{k-1})}^{\phi^{-1}(u_k)} \|\vec{r}_2'(\tau)\|\,d\tau$$

$$= \int_c^d \|\vec{r}_2'(\tau)\|\,d\tau$$

لدينا $\phi^{-1}(u_\ell)=\phi^{-1}(b)$

$\phi$ دالة متزايدة $= d$

$\phi^{-1}(u_0) = \phi^{-1}(a) = c$



2016/12/16 ١١:٣٠

أي لو غيرنا الجملة لن يتغير طول منحني

مبرهنة: إن طول منحنى مستقل عن الجملة الأصالية المنسوب إليها الفراغ.

ملاحظة: تتغير الجملة بإجراء عملية تدوير للجملة أو انسحاب أو تدوير مع انسحاب.

البرهان: $\vec{r}$ تمثيل مسموح به للمنحني $\mathcal{L}$

$$l(\mathcal{L}) = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| \, dt$$

حيث $\vec{r}'(t)$ متجه.

← بما أن $\vec{r}$ لا يتأثر بدوران المحاور فإن $\vec{r}'$ كذلك ومنه فالطول لا يتأثر.

وبالتالي لا يتغير الطول بتدوير الجملة

لتكن $oxyz$ جملة ناتجة عن $OXYZ$ بانسحاب.

$$\vec{r}(t) = \vec{OP} = \vec{OO_1} + \vec{O_1P}$$

$$= \vec{d_0} + \vec{R}(t)$$

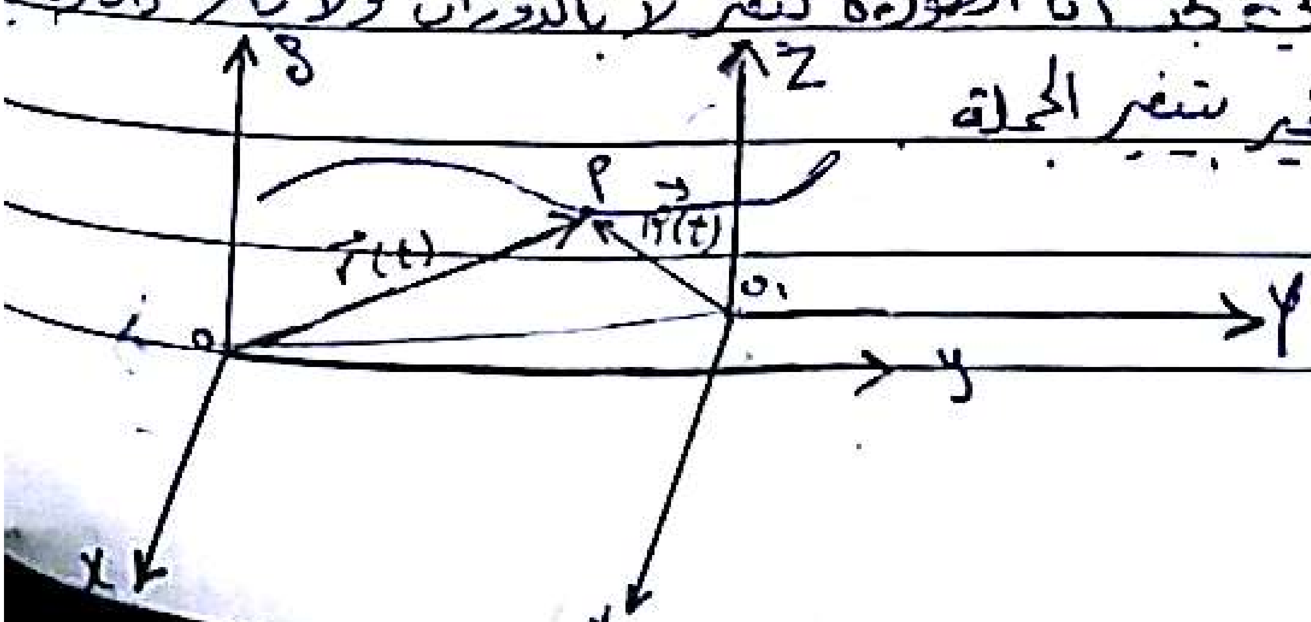
وتمثيل بالجملة الجديدة

بالاشتقاق بالنسبة لـ $t$:

$$\vec{r}'(t) = \vec{R}'(t)$$

$$\underbrace{l(\mathcal{L})}_{\text{قبل الانسحاب}} = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| \, dt = \int_a^b \|\vec{R}'(t)\| \, dt = \underbrace{l(\mathcal{L})}_{\text{بعد الانسحاب}}$$

وبالتالي نجد أن الطول لا يتغير بالدوران ولا بالانسحاب وبالتالي لا يتغير بتغير الجملة.



* الوسيط الطبيعي - التمثيل الوسيطي الطبيعي لمنحنٍ:

ليكن $\vec{r}: I \to \mathbb{R}^3$ تمثيلاً وسيطياً نظامياً من الصنف $C^k$ قطعياً $(k \geq 1)$ لمنحنٍ $\mathcal{L}$. نستطيع تعريف وسيط جديد s بالمساواة التالية:

$$s = s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\vec{r}'(u)\| \cdot du$$

(يمثل في الحالة العامة طول قوس من المنحني) حيث $t_0$ نقطة ثابتة (كيفية) من I و t نقطة متحولة في I و $I = [t_1, t_2]$

$\vec{r}$ نظامي من الصنف $C^k$ قطعياً عندها الدالة $\|\vec{r}'(t)\|$ الدالة الحقيقية مستمرة قطعياً فحسب المبرهنة ستكون s مستمرة على I وإن:

$$\frac{ds}{dt} = \|\vec{r}'(t)\|$$

s دالة متزايدة على I لأنها دالة مشتقها موجود وأكبر تماماً من الصفر ... منتهٍ من النقاط مستمرة.

$\frac{ds}{dt}$ موجود عند كل نقطة باستثناء نقاط التجزئة

* الدالة المتزايدة أو المتناقصة تكونا متباينة

لتكن $s: I \to J$ عندئذ ستكون $s(I) = J$

$t \mapsto s(t)$

مستمرة ومتزايدة وغامرة ⇐ تقابل وبالتالي لها تقابل عكسي ونرمز له بـ $\phi$ أي أن:

$$s^{-1} = \phi: J \to I$$

$$s \mapsto \phi(s) = t$$

لنضع

$$\vec{r}^*(s) = \vec{r}(\phi(s))$$

$$\forall s \in J$$

إن $\vec{r} \sim \vec{r}^*$ ⇐ $\vec{r}^*$ تمثيل صحيح بعد ل $\mathcal{L}$

(لأن $\phi$ غامرة وبسبب التقابل عكسي وهي مستمرة لأن التقابل العكسي لدالة مستمرة هو دالة مستمرة.

يكون $\vec{r}^* \sim \vec{r}$ إذا وجدت دالة مستمرة ومتزايدة وغامرة وكانت ... للتبديل

ملاحظة: الدالة المعاكسة (العكسية) لدالة مطردة سيكون مطردة وأكثر من ذلك سيكون لها نفس جهة اطراد الدالة.

$\varphi$ متزايدة لأنها دالة معاكسة لـ $s$ "حسب الملاحظة"

نسمي التمثيل $[\vec r^*]$ بالتمثيل الطبيعي للمنحني $L$ الناتج عن التمثيل الوسيطي $\vec r$ ونسمي عملية الحصول على $\vec r^*$ بالتوسيط الطبيعي للمنحني $L$، كما نسمي $s$ وسيطاً طبيعياً أو وسيطاً قوسياً أي طول القوس للمنحني $L$.

إذا كانت لدينا دالتين متعاكستين وكانت أحداهما قابلة للاشتقاق ومشتقتها لا يساوي صفر فإن الدالة المعاكسة قابلة للاشتقاق ومشتقها يساوي مقلوب مشتق دالة الأساسية

ملاحظة (1): يمكن أن نرمز بـ $\vec r(s)$ للتمثيل الوسيطي الطبيعي الناتج عن التمثيل $\vec r(t)$ وعندها سيكون:

$$\vec r'(t) = \frac{d\vec r}{dt}, \quad \vec r'(s) = \frac{d\vec r}{ds}$$

العلاقة بين المشتق بالنسبة لوسيط طبيعي ومشتق بالنسبة لوسيط عادي:

$$\vec r'(s) = \frac{d\vec r}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\vec r'(t)}{\|\vec r'(t)\|}$$ علاقة مهمة

ملاحظة (2): إن الوسيط الطبيعي متعلق بالنقطة $t_1$ ( $\vec r(t_1)$ مبدأ قياس الأطوال) فإذا أخذنا $t_0$ بدل $t_1$ فإن:

$$s_1 = \int_{t_1}^{t} \|\vec r'(u)\|\,du = \int_{t_1}^{t_0} \|\vec r'(u)\|\,du + \int_{t_0}^{t} \|\vec r'(u)\|\,du = c + s$$

حيث $c$ هو القياس الجبري لطول قوس المنحني بين $\vec r(t_1)$ و $\vec r(t_0)$

إذا: سالب $t_0 < t_1$

إذا: موجب $t_0 > t_1$

القياس الجبري لطول قوس المنحني الواصل بين رأسي $\vec{r}(t_0)$ و $\vec{r}(t)$ هو:

$$S = \int_{t_0}^{t} \| \vec{r}'(u) \| \, du$$

بعضهم يسمي $S$ بالفاصلة المنحنية

ملاحظة (3): التوسيط الطبيعي لا يتعلق باختيار تمثيل معين للمنحني موضوع الدراسة.