المحاضرة الثالثة

الحركة الدورانية للجسم الصلب حول محور ثابت.

تعريف:

هي حركة جسم صلب تثبت فيه نقطتان، ندعو المستقيم الواصل بين هاتين النقطتين بمحور الدوران.

- وجدنا سابقاً أن درجة حرية جسم صلب مثبت بنقطتين هي درجة حرية واحدة فقط.

أي أنه يوجد إحداثي معمم واحد، بالتالي معادلة حركة واحدة.

إذاً يتعين هذا الجسم بوسيط واحد مستقل نختاره كما نشاء

وللسهولة يمكن اختياره الزاوية θ المحصورة بين المستويين هما:

- مستوي ثابت يحوي محور الدوران.
- مستوي متماسك مع الجسم ويحوي أيضاً محور الدوران.

مثال:

دوران الباب حول محوره يتعين ب:

مستوي ثابت هو الحائط ومستوي متماسك هو الباب نفسه

وكل منهما يحوي محور الدوران نفسه فبمعرفة العلاقة:

$\theta = \theta(t)$ (معادلة الحركة) تكفي لتعيين الجسم وبمعرفة θ

نعلم موضع أي نقطة من الجسم

- إن كل نقطة من الجسم المتحرك تشكل (ترسم) دائرة مركزها على محور الدوران (لأن الحركة دورانية للجسم الصلب حول محور ثابت)
- إن مسارات النقط هي دوائر متوازية تعامد محور الدوران.
- إذا دارت أي نقطة بزاوية θ فإن جميع النقاط ستدور بنفس الزاوية.

السرعة الزاوية (ω):

هي مشتق الزاوية θ بالنسبة للزمن ونرمز لها (ω) وتكتب:

$$\omega = \theta' = \frac{d\theta}{dt}$$

شعاع الدوران (شعاع السرعة الزاوية) ($\vec{\omega}$) :

هو الشعاع المحمول على محور الدوران ، قيمته العددية هي السرعة الزاوية

وجهته تكون بحيث الدوران حول المحور مباشراً (بالاتجاه الموجب) (أو حسب قاعدة اليد اليمنى)

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{u}$$

القيمة العددية . ← ω ، $\vec{u}$ → شعاع واحدة المحور

- القيمة العددية هي الطويلة .
- ليس من الضرورة أن تكون طويلته ثابتة في كل لحظة أما الجهة فهي دوماً ثابتة

أي شعاع الدوران هو ثابت بالمنحى ولكن متغير بالقيمة وهو نفسه لجميع نقاط الجسم .

- أما إذا كان شعاع الدوران ثابت بالقيمة تكون الحركة دورانية منتظمة

التسارع الزاوي (ε)

هو مشتق السرعة الزاوية بالنسبة للزمن ونكتب :

$$\varepsilon = \theta'' = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \omega'$$

شعاع التسارع الزاوي ($\vec{\varepsilon}$)

هو المشتق لشعاع الدوران بالنسبة للزمن

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

وهو شعاع محمول دوماً على محور الدوران (لهذه الحركة بالذات) ولكن جهته ليست بالضرورة من جهة $\vec{\omega}$

(في الفراغ دوماً نختار محور الدوران هو oz فيكون $\vec{\omega}$ محمولاً على $\vec{k}$)

ملاحظات :

- $\vec{\omega}$ و $\vec{\varepsilon}$ بنفس الجهة $\Longleftrightarrow$ الحركة متسارعة

- $\vec{\omega}$ و $\vec{\varepsilon}$ متخالفين بالجهة $\Longleftrightarrow$ الحركة متباطئة

- $\vec{\varepsilon} = \vec{0}$ $\Longleftrightarrow$ الحركة منتظمة $\Longleftrightarrow$ $|\vec{\omega}| = const$

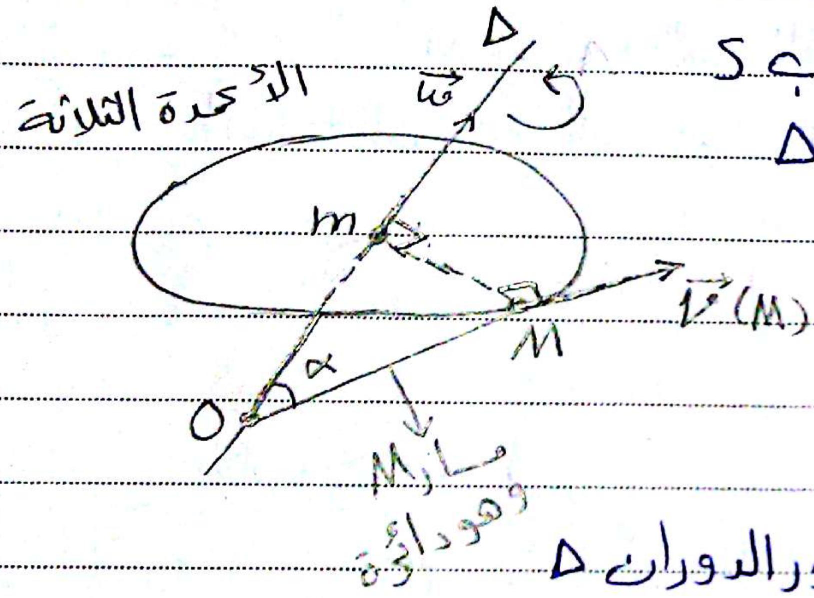
- $|\vec{\varepsilon}| = const$ $\Longleftrightarrow$ الحركة متغيرة بانتظام

(ثابت)

إذا كان شعاع الدوران ثابت فالحركة دورانية منتظمة

الدراسة الشعاعية للحركة الدورانية حول محور ثابت :

توزع السرع في الجسم :



لتكن M نقطة من الجسم الصلب S

فإن مسارها دائرة مركزها يقع على Δ

إذن $\vec{V}(M) \perp \vec{\omega}$

(شعاع السرعة هو مماس المسار)

لتكن m المسقط القائم لـ M على محور الدوران Δ

أي :

$\vec{mM}$ هو نصف القطر و $\vec{\omega} \perp \vec{mM}$
حيث

لتكن $O \in \Delta$ فيمكننا كتابة :

$$\vec{OM} = \vec{Om} + \vec{mM} \quad (0)$$

لدينا
$$\left.\begin{array}{l} \vec{V}(M) \perp \vec{\omega} \\ \vec{V}(M) \perp \vec{mM} \\ \vec{\omega} \perp \vec{mM} \end{array}\right\}$$ الأعمدة الثلاثة

r نصف القطر للدائرة و $|\vec{V}(M)| = \omega \cdot r$

ولتكن $O \in \Delta$ ، إذن $\vec{V}(M)$ ينطبق على الجداء الخارجي لشعاع السرعة الزاوية مع $\vec{OM}$ ومنه :

$$\vec{V}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{OM} \quad (*)$$

نعوض ⓞ في (*) نجد:

$$\vec{V}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{OM} = \vec{\omega} \wedge (\vec{Om} + \vec{mM})$$

وبما أن $O, m \in \Delta$ بالتالي:

$$\vec{Om} \parallel \vec{\omega} \quad \text{و} \quad \vec{\omega} \wedge \vec{Om} = \vec{0}$$

ومنه نجد:

$$\vec{V}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{mM}$$

بالتالي أصبح لدينا عبارتين للسرعة:

① $\vec{V}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$; و $O \in \Delta$

② $\vec{V}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{mM}$; و m المسقط القائم لـ M على Δ

القيمة العددية للسرعة:

$$|\vec{V}(M)| = \omega . r \quad ; \quad \text{و } r \text{ نصف القطر.}$$

$$\left(|\vec{V}(M)| = |\vec{\omega}| . |\vec{OM}| . \sin\alpha = |\vec{\omega}| . |\vec{mM}| = \omega . r \right)$$

توزع التسارعات:

نعلم أن التسارع هو مشتق شعاع السرعة بالتالي:

$$\forall M \in S : \vec{\Gamma}(M) = \frac{d\vec{V}(M)}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \wedge \vec{OM})}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}(M) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{OM}}{dt}$$

تفاضل الأول بالثاني + الأول بتفاضل الثاني

$$\boxed{\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}(M)}$$

$\vec{V}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{mM}$

العلاقة التي ستفيدنا في الحل

$$= \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{mM})$$

علاقة جيبس:

$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = a.(b.c) - (a.b).c$

حسب جيبس:

$$= \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega}.(\vec{\omega}.\vec{mM}) - \omega^2 . \vec{mM}$$

وبما أن $\vec{\omega} \perp \vec{mM} \Rightarrow \vec{\omega}.\vec{mM} = 0$

ومنه:

$$\boxed{\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} - \omega^2 \vec{mM}}$$

عبارة التسارع النهائية.

O: نقطة من محور الدوران

m: المسقط القائم لـ M على محور الدوران

AL SAMRAH

Scanned by CamScanner

ينتج من العلاقة الأخيرة تسارعين :

مماسي $\overrightarrow{\Gamma_T}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{OM}$ (لأنه يوازي $\vec{V}(M)$)

ناظمي $\overrightarrow{\Gamma_N}(M) = -\omega^2 \cdot \overrightarrow{mM}$ (هو شعاع محمول على mM ويتجه نحو مركز المسار)

ومنه :

$$\vec{\Gamma}(M) = \overrightarrow{\Gamma_T}(M) + \overrightarrow{\Gamma_N}(M)$$

ملاحظة :

إذا كان $\omega = const$ (الحركة دورانية منتظمة) $\Longleftarrow$ $\varepsilon = 0$

بالتالي $\overrightarrow{\Gamma_T}(M) = 0$ ويصبح تسارع أي نقطة ناظمياً.

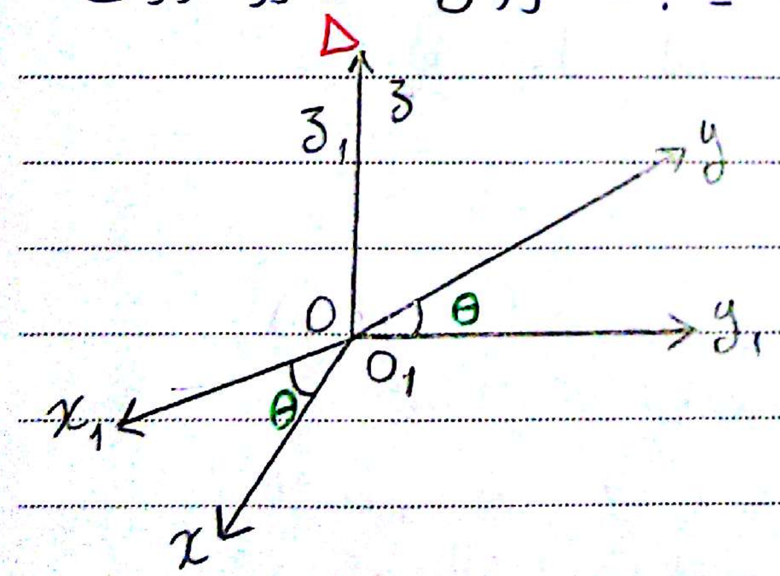
الدراسة التحليلية للحركة : (نأخذ العلاقات الشعاعية ونسقطها)

تعيين الموضع:

لنأخذ جملة محاور ثابتة $O_1x_1y_1z_1$ بحيث ينطبق المحور O_1z_1 على محور الدوران Δ

وجملة محاور متماسكة مع الجسم $Oxyz$ بحيث ينطبق المحور Oz على محور الدوران Δ

(فهو ينطبق أيضاً على O_1z_1)

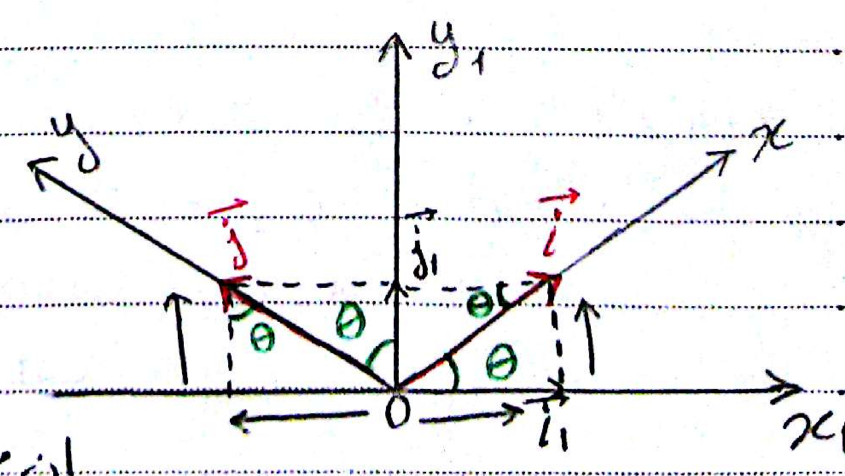


إن موضع M تحليلياً يعين بإسقاط العلاقة :

$$\overrightarrow{O_1M} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

على جملة المحاور الثابتة

لنكتب $\vec{i}$, $\vec{j}$ بدلالة الزاوية θ :



$$\vec{i} = \cos\theta\,\vec{i_1} + \sin\theta\,\vec{j_1}$$

$$\vec{j} = -\sin\theta\,\vec{i_1} + \cos\theta\,\vec{j_1}$$

$$\vec{K} = \vec{K_1}$$

إن مسقط كل من $\vec{i}, \vec{j}$ هو تركيب لشعاعين على Ox_1, Oy_1 بالتالي تكون علاقة جمع

• شعاع واحدة المحور $\vec{i}$:
من نهاية الشعاع $\vec{i}$ رسمنا موازٍ لـ y_1 نحصل على مسقط الشعاع على x_1
أما إذا رسمنا من نهاية الشعاع $\vec{i}$ موازي لـ x_1 أحصل على مسقط الشعاع
على y_1 فيكون :

$$\vec{i} = \cos\theta\,\vec{i_1} + \sin\theta\,\vec{j_1}$$

• شعاع واحدة المحور $\vec{j}$:
نفس الشيء

$$\vec{j} = -\sin\theta\,\vec{i_1} + \cos\theta\,\vec{j_1}$$

لدينا شعاع الموضع :

$$\overrightarrow{O_1M} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

في الجملة المتماسكة

أما في الجملة الثابتة :

$$\overrightarrow{O_1M} = x(\cos\theta\,\vec{i_1} + \sin\theta\,\vec{j_1}) + y(-\sin\theta\,\vec{i_1} + \cos\theta\,\vec{j_1}) + z\vec{k_1}$$

$$\overrightarrow{O_1M} = (x\cos\theta - y\sin\theta)\vec{i_1} + (x\sin\theta + y\cos\theta)\vec{j_1} + z\vec{k_1}$$

ومنه تكون المساقط بالشكل :

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x\cos\theta - y\sin\theta \\ y_1 &= x\sin\theta + y\cos\theta \\ z_1 &= z \end{aligned}\right]$$

مركبات (مساقط) M في الجملة الثابتة.

(x, y, z) هي مقادير ثابتة غير تابعة للزمن
معادلة الحركة الوحيدة للجسم هي $\theta = \theta(t)$
وبتعويض θ بدلالة الزمن t بالمساقط نحصل على معادلات
حركة النقطة M وهي :

$$x_1 = x_1(t) \quad \text{و} \quad y_1 = y_1(t) \quad \text{و} \quad z_1 = z_1(t)$$

وبحذف الوسيط t من معادلات الحركة نحصل على معادلتين :

$$f_2(x_1, y_1, z_1) = 0 \;,\quad f_1(x_1, y_1, z_1) = 0$$

تشكلان مسار النقطة M

تعيين السرعة:

$$\vec{V}(M)=\frac{d\vec{OM}}{dt}=x'\vec{i}_1+y'\vec{j}_1+z'\vec{k}_1$$

وهي مركبات متجه السرعة على جملة المحاور الثابتة.

أو يمكننا عن طريق:

$$\vec{V}(M)=\vec{\omega}\wedge\vec{OM}=\begin{vmatrix}\vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1\\ 0 & 0 & \theta'=\omega\\ x_1 & y_1 & z_1\end{vmatrix}=-\omega y_1\vec{i}_1+\omega x_1\vec{j}_1$$

وهي العبارة الشعاعية.

- يمكن الحصول على مركبات متجه السرعة على الجملة المتحركة بالإسقاط:

$$\vec{V}(M)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & \omega\\ x & y & z\end{vmatrix}=-\omega y\vec{i}+\omega x\vec{j}$$

فقط على الجملة الثابتة يمكننا اشتقاق $\vec{OM}$ مباشرةً للحصول على $\vec{V}(M)$

تعيين التسارع:

$$\vec{\Gamma}(M)=\frac{d\vec{V}(M)}{dt}=\frac{d^2\vec{O_1M}}{dt^2}$$

$$=x_1''\vec{i}_1+y_1''\vec{j}_1+z_1''\vec{k}_1$$

أو عن طريق إسقاط العلاقة على المحاور الثابتة:

$$\vec{\Gamma}(M)=\vec{\varepsilon}\wedge\vec{O_1M}+\vec{\omega}\wedge\vec{V}(M)$$ احفظ العلاقة جيداً

$$=\begin{vmatrix}\vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1\\ 0 & 0 & \varepsilon\\ x_1 & y_1 & z_1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1\\ 0 & 0 & \omega=\theta'\\ -y_1\omega & x_1\omega & 0\end{vmatrix}$$

مركبات السرعة على الجملة الثابتة

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}(M) = (-\varepsilon y_1 - x_1 \omega^2)\vec{i}_1 + (\varepsilon x_1 - y_1 \omega^2)\vec{j}_1$$

أو على المحاور المتماسكة فينتج:

$$\vec{\Gamma}(M) = (-\varepsilon y - x\omega^2)\vec{i} + (\varepsilon x - y\omega^2)\vec{j}$$

الحركة المماسة لحركة دورانية حول محور ثابت:

إذا انعدمت سرع نقط مستقيم متماسك مع جسم صلب في لحظة واحدة فقط نستطيع القول أن حركة الجسم في هذه اللحظة مماسة لحركة دورانية حول محور ثابت.

مسألة:

تتحرك اسطوانة دائرية نصف قطرها (R) حول محورها الثابت معادلة حركتها هي:

$$\varphi = a \log\left(1 + \frac{\omega_0 t}{a}\right) \quad ; \quad a, \omega_0 = \text{constants}$$

(ثوابت)

والمطلوب:

1. عين شعاع الدوران وشعاع التسارع الزاوي للجسم
2. عين سرعة وتسارع نقطة ما من الجسم تبعد عن محور الدوران بالمقدار (R) (تعيين قيمة كل من التسارع المماسي والتسارع الناظمي والتسارع الكلي)
3. عين القيمة الحدية للسرعة والتسارع عندما $(t \to \infty)$.

الحل:

(من نص السؤال نستنتج نوع الحركة وبما أنه ذكر ((تتحرك اسطوانة دائرية حول محورها الثابت)) فبالتالي الحركة دورانية حول محور ثابت)

- نختار جملتين للمحاور

• الأولى $O_1x_1y_1z_1$ جملة محاور ثابتة بحيث O_1z_1 منطبق على محور الاسطوانة Δ

• ونختار جملة محاور ثانية $Oxyz$ متماسكة مع الاسطوانة بحيث

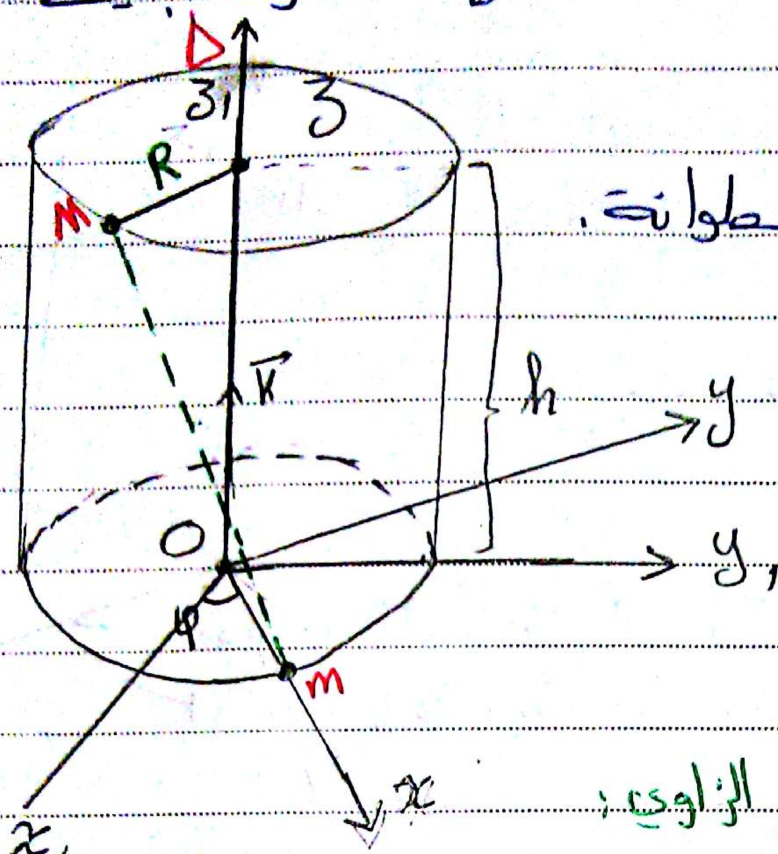
Oz منطبق على Δ

و O_1 منطبقة على O

- وليكن R هو نصف قطر قاعدة الاسطوانة.
- و h هو ارتفاع الاسطوانة.
- ونختار نقطة M من القاعدة العلوية بحيث مسقطها على Ox هو:

$M(R, 0, h)$.

(مركباتها على الجملة المتحركة)



(1) تعيين شعاع الدوران وشعاع التسارع الزاوي:

$$\vec{\omega} = \varphi' \vec{k_1} = a \frac{\frac{\omega_0}{a}}{1+\frac{\omega_0}{a}t} \cdot \vec{k_1} = \underbrace{\frac{\omega_0}{1+\frac{\omega_0}{a}t}}_{\omega} \cdot \vec{k_1}$$

$$\vec{\varepsilon} = \varphi'' \vec{k_1} = \underbrace{\frac{-\frac{\omega_0^2}{a}}{\left(1+\frac{\omega_0}{a}t\right)^2}}_{\varepsilon} \cdot \vec{k_1}$$

بما أن التسارع سالب فالحركة متباطئة.

(2) تعيين سرعة وتسارع نقطة M تبعد عن محور الدوران بالمقدار R:

$$\vec{V}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

في الجملة المتماسكة:

$$\vec{V}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ R & 0 & h \end{vmatrix} = \omega . R . \vec{j}$$

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}(M)$$

في الجملة المتماسكة:

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ R & 0 & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & R\omega & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\Gamma}(M) = -R\,\omega^2\,\vec{i} + \varepsilon\,R\,\vec{j}$$

$$\vec{\Gamma}_T(M) = \varepsilon\,R\,\vec{j} \quad , \quad \vec{\Gamma}_N(M) = -\omega^2\,R\,\vec{i}$$

القيم العددية هي :

$$|\vec{v}(M)| = \omega\,R$$

$$|\vec{\Gamma}(M)| = \sqrt{\varepsilon^2 R^2 + \omega^4 R^2}$$

- تعيين السرعة والتسارع في الجملة الثابتة :

إن مسقط $M(R,o,h)$ على ox هو :

$$\vec{OM} = R\,\vec{i} + h\,\vec{k}$$

ومنه للانتقال للجملة الثابتة :

$$\vec{OM} = R\,(\cos\varphi\,\vec{i}_1 + \sin\varphi\,\vec{j}_1) + h\,\vec{k}_1$$

وبالتالي :

$$\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{OM} = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & \omega \\ R\cos\varphi & R\sin\varphi & h \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}(M) = -\omega\,R\sin\varphi\,\vec{i}_1 + \omega\,R\cos\varphi\,\vec{j}_1$$

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ R\cos\varphi & R\sin\varphi & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega R\sin\varphi & \omega R\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\Gamma}(M) = (-\varepsilon R\sin\varphi - \omega^2 R\cos\varphi)\,\vec{i}_1 + (\varepsilon R\cos\varphi - \omega^2 R\sin\varphi)\,\vec{j}_1$$

و القيم العددية :

$$|\vec{V}(M)| = \sqrt{\omega^2 R^2 \sin^2\varphi + \omega^2 R^2 \cos^4\varphi} = \omega . R$$

$$|\vec{\Gamma}(M)| = \sqrt{(-\varepsilon R \sin\varphi - \omega^2 R\cos\varphi)^2 + (\varepsilon R\cos\varphi - \omega^2 R\sin\varphi)^2}$$

$$= R\sqrt{\varepsilon^2 - \omega^4}$$

③ تعيين الحركة والتسارع عندما $t \longrightarrow \infty$:

$$\omega = \frac{\omega_0}{1+\frac{\omega_0}{a}t} \quad , \quad \varepsilon = \frac{-\omega_0}{a(1+\frac{\omega_0}{a}t)^2}$$

$$\omega \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \quad , \quad \varepsilon \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

$$|\vec{V}(M)| \longrightarrow 0 \quad , \quad |\vec{\Gamma}(M)| \longrightarrow 0$$

فالحركة متباطئة باستمرار حتى تتوقف

وظيفة :

OABC صفيحة مربعة الشكل حيث C و O نقطتان ثابتتان

A ترسم دائرة بسرعة زاوية ω

أوجد مسار مركز الصفيحة D

ثم أوجد سرعة D (سيتم الحل لاحقاً)

انتهت المحاضرة

بيان البشا شي ٩٨