Syria Math

المعادلات التفاضلية 1

الدكتور : عبد الله المليح

المحاضرة : الرابعة (عملي)

إعداد : محمد شهلا وفادي الشريطي

التاريخ : ٣٠/١٠/٢٠١٦

Web: www.syriamath.net group: Improve our mathematics

مرحبا أصدقائي سوف نكمل معكم في مقرر معادلات تفاضلية (١) عملي.....

في المحاضرات السابقة كان لدينا مثال إيجاد المعادلة التفاضلية لمجموعة المنحنيات

$$x^2 + y^2 = cx$$

وكانت المعادلة

$$x^2 + 2xyy' - y^2 = 0$$

والآن :سنحل هذه المعادلة وهي معادلة تفاضلية متجانسة

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy} \xRightarrow{\frac{1}{x^2}} y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{\frac{2y}{x}} \dots\dots\dots(1) : x^2 \neq 0$$

$$z = \frac{y}{x} \Longrightarrow y = zx \xRightarrow{\text{بالاشتقاق}} y' = xz' + z$$

$$y' = \frac{z^2-1}{2z} \qquad \text{ولدينا من (١)}$$

$$z + xz' = \frac{z^2 - 1}{2z} \to xz' = \frac{(z^2 - 1 - z^2)}{2z}$$

$$\frac{2zdz}{z^2+1} = -\frac{dx}{x} \xRightarrow{\text{نكامل}} \ln(z^2+1) = -\ln|x| + \ln|c|$$

$$z^2 + 1 = \frac{c}{x} \xRightarrow{\text{نعوض}} \frac{y^2}{x^2} + 1 = \frac{c}{x} \to y^2 + x^2 = c(x)$$

وهو المطلوب.... ☺

معادلة برنولي:

وهي من الشكل $\boldsymbol{y' + p(x)y = q(x)y^n}$

$n \neq 0$ لأنها ترد إلى خطية أو منفصلة

$n \neq 1$ لأنها ترد إلى قابلة للفصل ومن السهل إيجاد الحل في كلا الحالتين...

ولحلها : ☺

نقسم على y^n تصبح من الشكل $\boxed{y'y^{-n}+p(x)y^{1-n}=q(x)}$

نفرض الآن أن $\boxed{y^{1-n}=z}$ ومنه $\boxed{z'=(1-n)y^{-n}\,y'}$

مثال:

$$xy'-y=e^{-x^2}\,\boldsymbol{y^3}$$

الحل:

نقسم على $y^3\neq 0, x\neq 0$ ومنه $\frac{y'}{y^3}-\frac{1}{xy^2}=\frac{e^{-x^2}}{x}$

الآن... نفرض أن $\boldsymbol{z=y^{-2}}$

$$z'=-2y^{-3}y'\xrightarrow{\text{نعوض } y'y^{-3}=-\frac{z'}{2}} z'+\frac{2}{x}z=-\frac{2}{x}e^{-x^2}\ \ldots\ldots.(*)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة (١)

$$z'+\frac{2}{x}z=0\to\frac{dz}{z}=-\frac{2}{x}dx\overset{\int}{\Longrightarrow}\ln|z|=-2\ln|x|+\ln|c|$$

$$\ln|z|=ln\left|\frac{c}{x^2}\right|\to z=\frac{c}{x^2}$$

الآن نجعل c=c(x)

$$z=x^{-2}\,c(x)\overset{\text{نشتق}}{\Rightarrow}z'=-2x^{-3}c(x)+c'(x)x^{-2}$$

نعوض في (*) $-2x^{-3}c(x)+c'(x)x^{-2}+\frac{2}{x}\frac{c(x)}{x^2}=-\frac{2e^{-x^2}}{x}$

$$c'(x)x^{-2}=-\frac{2e^{-x^2}}{x}\to c'(x)=x.-2e^{-x^2}$$

نكامل .... $c(x)=e^{-x^2}\to z=\frac{e^{-x^2}}{x^2}$

ومنه الحل العام لـ (*) $z = \frac{e^{-x^2}}{x^2} + \frac{c}{x^2}$

$$y^{-2} = \frac{e^{-x^2} + c}{x^2} \to y = \sqrt{\frac{x^2}{e^{-x^2} + c}}$$

ملاحظة!!! في معادلة برنولي n حقيقي أي يمكن أن يكون $n = \frac{1}{2}$

مثال : $y' + 4xy = 4xy^{\frac{1}{2}}$

المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى التامة ستكون من الشكل أو (نردها إلى الشكل):

$$\boxed{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0}$$

وتكون المعادلة السابقة تامة إذا وفقط إذا كان

$$\boxed{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{N(x,y)}{\partial x}}$$

خطوة أولى :بما أن المعادلة تامة فالحل العام لها هو من الشكل $F(x,y) = c$

حيث: $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \ldots \ldots . . (1)$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) \ldots \ldots \ldots \ldots . (2)$$

خطوة (٢) :نكامل طرفي (١) بالنسبة ل x

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y) \ldots \ldots . . (\&)$$

نشتق طرفي (&) بالنسبة ل y $\frac{\partial F}{\partial y} = (\quad) + \varphi'(y)$

نطابق مع (٢) $\frac{\partial F}{\partial y} = N$

نوجد $\varphi'(y)$ ومن ثم $\varphi(y)$ ثم نعوض في (&) نحصل على المطلوب ....

- **مثال :** $y' = \frac{2x-y-3}{x-3y+1}$

الحل:

$$\underbrace{(2x-y-3)}_{M(x,y)}\ dx+\underbrace{(3y-x-1)}_{N(x,y)}\ dy=0$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=-1=\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$F(x,y)=c$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=M(x,y)=2x-y-3\ \dots\ \dots.(1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=N(x,y)=3y-x-1\ \dots\ \dots\ \dots(2)$$

نكامل طرفي (١) بالنسبة ل x

$$F(x,y)=x^2-yx-3x+\varphi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-x+\varphi'(y)$$

نطابق مع (٢) $-x+\varphi'(y)=3y-x-1$

$$\varphi'(y)=3y-1\rightarrow(\text{بالمكاملة})\rightarrow\varphi(y)=\frac{3}{2}y^2-y+c_1$$

$$F(x,y)=x^2-yx-3x+\frac{3}{2}y^2-y+c_1$$

وهو المطلوب..........

- **آلية أخرى لقد مررنا عليها في مقرر تحليل المتجهات:**

$$(2x-3)dx\underbrace{-ydx}+(3y-1)dy\underbrace{-xdx}=0$$

$$d(x^2-3x)-d(x.y)+d\left(\frac{3}{2}y^2-y\right)=0$$

ومنه تفاضل مجموع تفاضلات = مجموع التفاضلات والعكس صحيح أي

$$d\left(x^2-3x-xy+\frac{3}{2}y^2-y\right)=0$$

تفاضل دالة يساوي الصفر وبالتالي الدالة تساوي ثابت

$$x^2-3x-xy+\frac{3}{2}y^2-y=0$$

مثال آخر

$$\underbrace{x^2y'+3x^2y}=-\sin(x)$$

نلاحظ أنه مشتق جداء وبالتالي

$$(x^3y)'=-\sin(x)$$

بالمكاملة

$$x^3y=\cos(x)+c\rightarrow\ y=\frac{\cos(x)+c}{x^3}$$

مثال آخر

$$2\underbrace{(x^2+xy)}dx+\underbrace{(x^2+y^2)}dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2x\ ,\frac{\partial N}{\partial x}=2x$$

وبالتالي هي تامة والحل العام من الشكل ......

F(x,y)=c حيث $\frac{\partial F}{\partial x}=M\ ,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=N$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x^2+2xy\ \ldots\ldots\ldots.(1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=x^2+y^2\ \ldots\ldots\ldots\ldots.(2)$$

$$F(x,y) = x^2y + \frac{y^3}{3} + \varphi(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy + \varphi'(x)$$

نطابق مع (٢) $\quad 2xy + \varphi'(x) = 2x^2 + 2xy$

$$\varphi'(x) = 2x^2 \rightarrow \int \varphi'(x)dx \rightarrow \varphi(x) = \frac{2}{3}x^3$$

$$F(x,y) = x^2y + \frac{y^3}{3} + \frac{2x^3}{3} + c_1$$

وهو المطلوب ....

"انتهت المحاضرة"