



Syria Math

المعادك لات التفاضلية 1



الدكتور: خليل يحيى

المحاضرة : الرابعة

التاريخ : ٢٦/١٠/٢٠١٦

المعادك : محمد شهاب & خالد الشمار

Web: www.syriamath.net

group: Improve our mathematics



قام الدكتور بمراجعة المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى ، ثم قام بعرض أمثلة عنها..

المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى هي التي من الشكل:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

نوجد الحل الأول ، وذلك بجعل $q(x) = 0$:

$$y_1: y' + p(x).y = 0$$

نوجد الحل الثاني (مع طرف ثانٍ) ، $q(x) \neq 0$:

$$y_2: y' + p(x).y = q(x)$$

عندها يكون:

$$y = y_1 + y_2$$

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(1 + x^2).y' - 2xy = (1 + x^2)^2$$

الحل: نقسم الطرفين على $(1 + x^2)$:

$$\Rightarrow y' - \frac{2x}{1 + x^2}.y = 1 + x^2$$

وهي معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من الشكل: $y' + p(x)y = q(x)$

لإيجاد الحل العام لها نتبع الخطوات السابقة (من المحاضرة السابقة):

(1) نوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية دون طرف ثانٍ:

$$\begin{aligned} y' - \frac{2x}{1 + x^2}.y = 0 &\Rightarrow y' = \frac{2x}{1 + x^2}.y \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1 + x^2}.y &\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2x}{1 + x^2}.dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \ln|1 + x^2| + \ln|c| \Rightarrow \ln|y| - \ln|c| = \ln|1 + x^2|$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{y}{c}\right| = \ln|1 + x^2| \Rightarrow \frac{y}{c} = 1 + x^2 \Rightarrow \boxed{y_1 = c.(1 + x^2)}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة (دون طرف ثانٍ).



(٢) نوجد حل خاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة (مع طرف ثانٍ):

ومن أجل ذلك نجعل الثابت c تابع لـ x فنكتب الحل العام السابق بالشكل:

$$y = c(x). (1 + x^2) \dots (*)$$

ثم نشتق بالنسبة لـ x :

$$\Rightarrow y' = c'(x). (1 + x^2) + 2x.c(x)$$

والآن نعوض في المعادلة التفاضلية مع طرف ثانٍ:

$$\Rightarrow c'(x). (1 + x^2) + 2x.c(x) - \frac{2x}{1 + x^2}. c(x). (1 + x^2) = 1 + x^2$$

$$\Rightarrow c'(x). (1 + x^2) = 1 + x^2 \Rightarrow c'(x) = 1$$

نكامل الطرفين:

$$\Rightarrow c(x) = x + c_1$$

نعوض قيمة $c(x)$ في العلاقة (*) فنحصل على الحل العام المطلوب:

$$\boxed{y = (x + c_1). (1 + x^2)}$$

مثال (٢): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y' - \frac{1}{x}y = 1$$

الحل: هي معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من الشكل: $y' + p(x)y = q(x)$

لإيجاد الحل العام لها نتبع الخطوات السابقة ذاتها:

(١) نوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية دون طرف ثانٍ:

$$y' - \frac{1}{x}y = 0 \Rightarrow y' = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + \ln|c| \Rightarrow \ln|y| - \ln|c| = \ln|x|$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{y}{c}\right| = \ln|x| \Rightarrow \frac{y}{c} = x \Rightarrow \boxed{y_1 = c \cdot x}$$



(٢) نوجد حل خاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة (مع طرف ثانٍ):

ومن أجل ذلك نجعل الثابت c تابع لـ x فنكتب الحل العام السابق بالشكل:

$$y = c(x).x \dots (*)$$

ثم نشتق بالنسبة لـ x :

$$\Rightarrow y' = c'(x).x + c(x)$$

والآن نعوض في المعادلة التفاضلية مع طرف ثانٍ:

$$\Rightarrow c'(x).x + c(x) - \frac{1}{x}.c(x).x = 1$$

$$\Rightarrow c'(x).x = 1 \Rightarrow c'(x) = \frac{1}{x}$$

نكامل الطرفين:

$$\Rightarrow c(x) = \ln x + \ln c_1$$

نعوض قيمة $c(x)$ في العلاقة (*) فنحصل على الحل العام المطلوب:

$$y_2 = x. \ln|x.c_1|$$

مثال (٣): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y' - y. \tan x = \frac{1}{\cos x}$$

الحل: هي معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من الشكل: $y' + p(x)y = q(x)$

لإيجاد الحل العام لها نتبع الخطوات السابقة ذاتها:

(١) نوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية دون طرف ثانٍ:

$$y' - y. \tan x = 0 \Rightarrow y' = y. \tan x = y. \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y. \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{\sin x}{\cos x}. dx$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \ln|\cos x| + \ln|c| \Rightarrow \ln|y| - \ln|c| = \ln|\cos x|$$

$$\Rightarrow \ln \left| \frac{y}{c} \right| = \ln|\cos x| \Rightarrow \frac{y}{c} = \cos x \Rightarrow y_1 = c. \cos x$$



(٢) نوجد حل خاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة (مع طرف ثانٍ):

ومن أجل ذلك نجعل الثابت c تابع لـ x فنكتب الحل العام السابق بالشكل:

$$y = c(x) \cdot \cos x \dots (*)$$

ثم نشتق بالنسبة لـ x :

$$\Rightarrow y' = c'(x) \cdot \cos x - \sin x \cdot c(x)$$

والآن نعوض في المعادلة التفاضلية مع طرف ثانٍ:

$$\Rightarrow c'(x) \cdot \cos x - \sin x \cdot c(x) + c(x) \cdot \sin x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\Rightarrow c'(x) \cdot \cos x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow c'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

نكامل الطرفين:

$$\Rightarrow c(x) = \tan x + c_1$$

نعوض قيمة $c(x)$ في العلاقة (*) فنحصل على الحل العام المطلوب:

$$y_2 = (\tan x + c_1) \cdot \cos x = \sin x + c_1 \cdot \cos x$$

((معادلة برنولي))

نقول عن المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى إنها معادلة برنولي إذا كانت من الشكل:

$$y' + p(x)y = q(x) \cdot y^n \dots (1) ; n \neq 1$$

حيث أن: $q(x)$ و $p(x)$ دالتان معرفتان ومستمرتان على مجال $I = [a, b]$ من \mathbb{R}

ولإيجاد الحل العام لهذه المعادلة نتبع ما يلي:

نقسّم الطرفين على y^n :

$$\Rightarrow \frac{y'}{y^n} + \frac{1}{y^{n-1}} \cdot p(x) = q(x) \dots (1)$$

نفرض z بحيث:

$$z = \frac{1}{y^{n-1}} = y^{-(n-1)}$$



نشتق الطرفين:

$$\Rightarrow z' = (1 - n).y^{-n}.y' \Rightarrow \frac{y'}{y^n} = \frac{z'}{(1 - n)}$$

نعوض في المعادلة (1):

$$\Rightarrow \frac{z'}{(1 - n)} + z.p(x) = q(x)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة يتم ايجاد حلها العام وفق خطوات الحل في المحاضرة السابقة.

مثال (1): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y' + 2xy = -xy^4$$

الحل: نقسم الطرفين على y^4 :

$$\Rightarrow \frac{y'}{y^4} + \frac{2x}{y^3} = -x \dots (1)$$

وهي معادلة من الشكل برنولي إذاً نفرض:

$$z = \frac{1}{y^3} = y^{-3}$$

نشتق الطرفين:

$$\Rightarrow z' = -3y'.y^{-4} = -3\frac{y'}{y^4}$$

نضرب المعادلة (1) بـ (-3):

$$\Rightarrow -3\frac{y'}{y^4} - \frac{6x.y}{y^4} = 3x$$

والآن نعوض:

$$\Rightarrow z' - 6x.z = 3x$$



وهكذا حصلنا على معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من المرتبة الأولى نحلها كما في المثال السابق
باتباع الخطوات ذاتها.

مثال (٢): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y' + 2xy = xy^3$$

الحل: نقسم الطرفين على y^3 :

$$\Rightarrow \frac{y'}{y^3} + \frac{2x}{y^2} = x \dots (1)$$

وهي معادلة من الشكل برنولي إذا افترض:

$$z = \frac{1}{y^2} = y^{-2}$$

نشتق الطرفين:

$$\Rightarrow z' = -2y' \cdot y^{-3} = -3 \frac{y'}{y^3}$$

نضرب المعادلة (1) بـ (-2):

$$\Rightarrow -2 \frac{y'}{y^3} - \frac{4x \cdot y}{y^3} = -2x$$

والآن نعوض في المعادلة:

$$\Rightarrow z' - 4x \cdot z = -2x$$

وهكذا حصلنا على معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من المرتبة الأولى.

لإيجاد الحل العام لها:

• نوجد حل العام للمعادلة التفاضلية الخطية دون طرف ثانٍ:

$$z' - 4x \cdot z = 0 \Rightarrow z' = 4x \cdot z$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 4x \cdot z \Rightarrow \frac{dz}{z} = 4x \cdot dx$$

$$\Rightarrow \ln|z| = 2x^2 + \ln|c| \Rightarrow \ln|z| - \ln|c| = 2x^2$$



$$\Rightarrow \ln \left| \frac{z}{c} \right| = 2 \Rightarrow \frac{z}{c} = e^{2x^2} \Rightarrow \boxed{z_1 = c \cdot e^{2x^2}}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة (دون طرف ثانٍ).

• نوجد حل خاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة (مع طرف ثانٍ):

ومن أجل ذلك نجعل الثابت c تابع لـ x فنكتب الحل العام السابق بالشكل:

$$z = c(x) \cdot e^{2x^2} \dots (*)$$

ثم نشتق بالنسبة لـ x :

$$\Rightarrow z' = c'(x) \cdot e^{2x^2} + 4x \cdot e^{2x^2} \cdot c(x)$$

والآن نعوض في المعادلة التفاضلية مع طرف ثانٍ:

$$\Rightarrow c'(x) \cdot e^{2x^2} + 4x \cdot e^{2x^2} \cdot c(x) - 4x \cdot e^{2x^2} \cdot c(x) = -2x$$

$$\Rightarrow c'(x) \cdot e^{2x^2} = -2x \Rightarrow c'(x) = \frac{-2x}{e^{2x^2}} = -2x \cdot e^{-2x^2}$$

نكامل الطرفين:

$$\Rightarrow c(x) = \int -2x \cdot e^{-2x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} \int -4x \cdot e^{-2x^2} \cdot dx$$

$$\Rightarrow c(x) = \frac{1}{2} e^{-2x^2} + c_1$$

نعوض قيمة $c(x)$ في العلاقة (*) فنحصل على:

$$z = \left(\frac{1}{2} e^{-2x^2} + c_1 \right) \cdot e^{2x^2} = c_1 \cdot e^{2x^2} + \frac{1}{2}$$

والآن نعود فنعوض قيمة z :

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{y^2} = c_1 \cdot e^{2x^2} + \frac{1}{2}}$$

وهو الحل العام المطلوب.

المعادلات التفاضلية التامة

تعريف: نقول عن المعادلة التفاضلية:

$$M(x, y) \cdot dx + N(x, y) \cdot dy = 0 \dots (1)$$



حيث أن $M(x, y)$ و $N(x, y)$ دالتان معرفتان ومستمرتان على منطقة ما ولتكن G ؛

إنها تامة إذا وجد تابع $F(x, y)$ معرف ومستمر على G بحيث يكون:

$$dF(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy \dots (2)$$

بالمقارنة بين (1) و (2) نجد أن:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$$

والتفاضل العام الكلي:

$$\Rightarrow dF(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot dy$$

بما أن الدالتين $M(x, y)$ و $N(x, y)$ قابلتان للمفاضلة ، نأخذ المشتق الجزئي الثاني لها:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

وبالمقارنة طرفاً إلى طرف نجد:

$$\boxed{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}$$

وهو الشرط اللازم لكي تكون المعادلة التفاضلية (1) تامة.

ويكون الحل العام لهذه المعادلة هو: $F(x, y) = c$

مثال ٢: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$x \cdot dy + y \cdot dx = 0$$

الحل:

$$\begin{cases} M(x, y) = x \Rightarrow \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 0 \\ N(x, y) = y \Rightarrow \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

ومنه فالمعادلة التفاضلية المدروسة تامة.



$$d(x.y) = 0$$

بالمكاملة نجد:

$$x.y = c \Rightarrow \boxed{y = \frac{c}{x}}$$

طريقة إيجاد الحل العام للمعادلات التفاضلية التامة بالطريقة العامة:

وجدنا أن المعادلة التفاضلية التامة تحقق أن:

$$(2) \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y) \\ \frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) \end{cases}$$

لإيجاد الحل العام يجب إيجاد الدالة F نأخذ إحدى العلاقتين في (2):

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) . dx + \varphi(y)$$

حيث: $\varphi(y)$ دالة تابعة لـ y فقط ،

وبالتالي يجب علينا إيجاد الدالة $\varphi(y)$ من أجل تحقق الشرط السابق ، وبالتالي من أجل ذلك:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} . dx + \varphi'(y) = N(x, y)$$

ونعلم أن:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} . dx + \varphi'(y) = N(x, y)$$

$$N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y) = N(x, y) \Rightarrow N(x_0, y) = \varphi'(y)$$

$$\varphi'(y) = \int_{y_0}^y N(x_0, y) . dy + c_1$$



$$F(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) \cdot dx + \int_{y_0}^y N(x, y) \cdot dy$$

وهو الحل العام حيث (x_0, y_0) نقطة تنتمي إلى مجال تعريف الدالة.
وبالمثال يتضح المقال..

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$x^2 \cdot dx + y^2 \cdot dy = 0$$

الحل: نبرهن أنها تامة:

$$\begin{cases} M(x, y) = x^2 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 0 \\ N(x, y) = y^2 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ومنه فالشرط محقق إذا المعادلة تامة.

لحلها نكتبها على شكل التكامل العام (ليست الطريقة العامة، بل حسب التعريف):

$$dF(x, y) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}(x^3 + y^3) = 0$$

فيكون الحل العام:

$$\frac{1}{3}(x^3 + y^3) = c$$

ويمكن الحصول على الحل العام باستخدام الطريقة العامة وهي التي سنستعملها غالباً ، وتصلح دائماً في حالة المعادلات التفاضلية التامة ، لدينا:

$$F(x, y) = \int M(x, y) \cdot dx + \varphi(y) = \int x^2 \cdot dx + \varphi(y) = \frac{x^3}{3} + \varphi(y)$$

نشتق بالنسبة لـ y :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 + \varphi'(y)$$

نجعل:



$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y) \Rightarrow \varphi'(y) = y^2 \Rightarrow \varphi(y) = \frac{y^3}{3} + c$$

$$\Rightarrow F(x, y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + c$$

وهو الحل العام المطلوب.

انتهت المحاضرة ..

